

ОСОБЕННОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЛОКАЛИЗАЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕГАТИВНЫМИ ПРОЦЕССАМИ

А.А. Волчек, Л.В. Образцов, П.В. Шведовский

В статье рассмотрены аспекты поиска методов локализационного управления распространением негативных процессов, обусловленных как реализацией целевых водохозяйственных мероприятий, так и их последствиями.

Приведены конкретные примеры реализации метода в области управления процессом распределения загрязнения подземных вод.

Введение

В настоящее время достаточно полно исследованы особенности распространения большинства негативных процессов, обусловленных реализацией как целевых водохозяйственных и других народнохозяйственных мероприятий, так и их последствием и последствиями.

Активизирующиеся и активно проявляющиеся в последнее время некоторые негативные изменения в природных системах требуют поиска оптимальных методов локализационного управления ими.

Постановка задачи

Бесспорно, наиболее простым решением проблемы является случай локализации области распространения негативных процессов, используя модель одной кривой L , удовлетворяющую следующим условиям [1]:

- $x(0) = C_0; x(t) = \omega(x); \omega(x) \in W(x); x(\tau) \notin X$ для любого $\tau \geq 0$,
- существует $\tau > 0$ такое, что $x(\tau) = C_0$. при этом кривая L , определенная вектор-функцией $x(t)$, $0 < t < m$, содержит внутри себя x_0 и $x(t)$ и удовлетворяет заданной ориентации движения процесса,
- для любого $(x) \in L$ происходит изменение $v(x, \varphi) = 0$.

Для заданных условий C_0 - начало локализации, $\omega(x, \varphi)$ – максимально возможная скорость локализации из заданной точки x в направлении φ .

Отсюда, задача оптимального локализационного управления может быть сформулирована в следующем виде: найти $\min_{L \in \{L\}} F(L)$ при параметрах $\{x_i\}$, C_0 , $W(x)$, где F – некоторый числовой критерий на множестве локализованных кривых $\{L\}$.

Собственно решение этой задачи требует:

- установить существование решения, т.е. вектор-функцию $x(t)$, удовлетворяющую вышеуказанным условиям;
- выделить некоторое подмножество, в котором могут содержаться большинство оптимальных, по заданным функциям, решений;
- в выделенном подмножестве найти оптимальное решение.

В качестве исходных целесообразно принять следующие параметры: n – число локализационных кривых; C_0, \dots, C_n - начальные точки локализационных кривых; τ_1, \dots, τ_n - начальные моменты локализации; $W_1(x), \dots, W_n(x)$ -

максимально допустимые скорости локализации; $\{G\}$ - множество ориентированных графов с числом вершин n . И, бесспорно, решение проблемы локализационного управления требует принятия критерия оптимизации, в качестве которых могут быть приняты [2, 3]:

$F_n = \min_{G \in \{L\}} G$ – наименьшее число локализационных кривых;

$F_\tau = \min_{G \in \{L\}} \tau(L)$ – наименьшее время локализации;

$F_s = \min_{L \in \{L\}} S(L)$ – наименьшая площадь локализационного процесса.

Наиболее характерным для большинства процессов распространения любых веществ и потенциалов является переход по нормали (рисунок 1), что определяет возможность поиска локализационных кривых с контурами равномерно расширяющейся окружности.

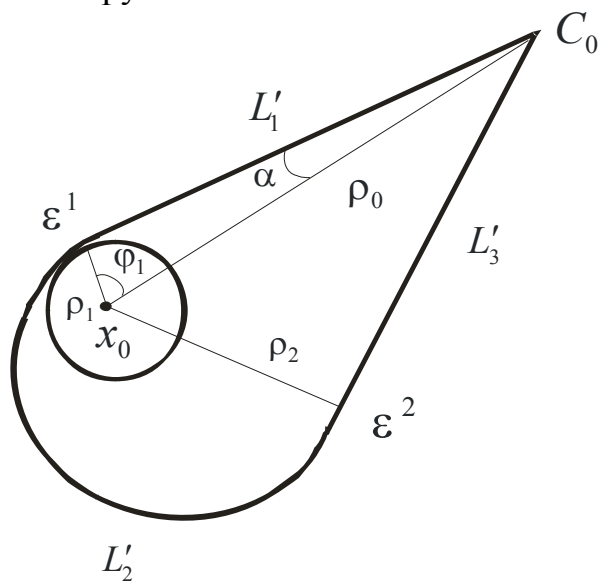


Рис. 1. Схема развития контуров кривых распространения негативных процессов и взаимосвязи основных параметров локализационных кривых

Расчетные параметры для данной схемы принимаем в виде:

$$\rho = \rho(\varphi); \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]; t \in [\tau^1, \tau^2] \quad (1)$$

Тогда из условия, что для всех t все точки функции соответствующей L лежат на контуре процесса распространения $Z(x, t) = 0$ имеем:

$$\rho(u) = t \cdot v(u); \frac{\partial z}{\partial t} + v_u(x, u) \cdot |\text{grad}Z| = 0. \quad (2)$$

После соответствующих преобразований получаем дифференциальное уравнение вида -

$$\rho'(u) = \rho(\varphi) \frac{\alpha + \beta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 + 1}}{1 - \beta^2}, \quad (3)$$

где $\alpha = \alpha(\varphi) = \frac{v'(\varphi)}{v(\varphi)}$; $\beta = \beta(\varphi) = \frac{v(\varphi)}{\omega}$;

с решением -

$$\rho(\varphi) = \rho(\varphi_1) \exp \left(\int_{\varphi_1}^{\varphi} f(z) \cdot dz \right) = \rho_1 \cdot l^{F(\varphi)}. \quad (4)$$

Очевидно, что особенности поиска оптимальной локализационной кривой будут связаны с выбором критерия оптимизации [4, 5].

Для критерия F_n соответственно имеем, что число n заранее не фиксировано. Каждый граф из $\{G\}$ может быть записан в виде схемы следования локализационных кривых:

$$(\delta_1, \dots, \delta_k, \dots) \text{ и } (\delta_1, \dots, \delta_k, \dots, \delta_{n-1}, \dots, \delta_n), \quad (5)$$

где $\delta_i=1$ соответствует движению по часовой, а $\delta_i=-1$ - против часовой стрелки. Осуществляя индуктивное построение процесса распространения $(y^S)'$ по определенным значениям ориентации $\delta_{S+1}=1$ получаем множество точек лежащих на внешней границе локализационной кривой, принадлежащей множеству $(\hat{y}^S)'$, и удовлетворяющей исходным четырем условиям.

Рассмотрим поиск локализационной кривой для случая равномерно-расширяющегося контура проявления негативного процесса. На рисунке 2 показаны схемы контуров и границы множеств допустимости $(\hat{y}^S)'$ процессов распространения большинства негативных процессов, а также наименьшее число локализационных кривых для сопряженных зон

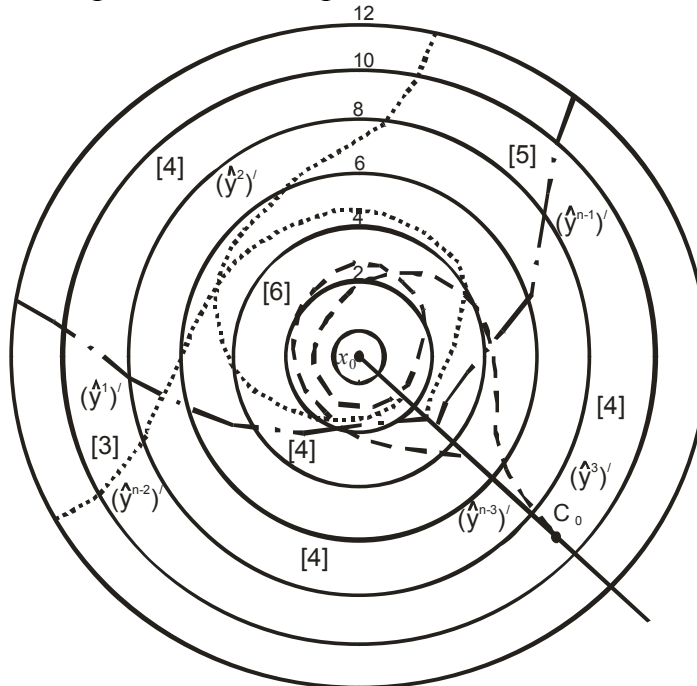


Рис. 2. Контур процесс распространения $x_i=2, 4, 6$, и границы множеств допустимости $(\hat{y}^S)'$ и $(\hat{y}^{n-S})'$ для первой $(1,1,\dots)$, второй $(-1, -1,\dots)$ и третьей $(1,1,\dots,-1,-1)$ схем следования и наименьшее число локализационных кривых.

Так как $(\hat{y}^S)'$ должна включать в себя только те точки, которые могут быть достигнуты при использовании не менее S локализационных кривых (L_1, L_2, \dots, L_S) удовлетворяющих расчетной схеме следования, то оптимальное решение будет определяться достижением условия $c_0 \in (\mathcal{F}^S)'$, где P - число локализационных кривых и

$$P = \min(i(x) + j(x), i(c_0), j(c_0)); \quad (6)$$

$$i(c_0) = p_1; j(c_0) = p_2.$$

На рисунке 3 представлены локализационные кривые по принятым критериям оптимизации - F_n , F_τ и F_s . Следует отметить, что число локализационных кривых для всех критериев оптимизации может быть от 4 до 6 (рисунок 3). Однако это характерно только для типовых схем следования (1, 1, 1, ...) и (...,-1, -1). Для схемы следования (1, 1, -1) число кривых не превышает 3, но для них существует общая обязательная площадь прохождения (на рисунке 3 заштрихована).

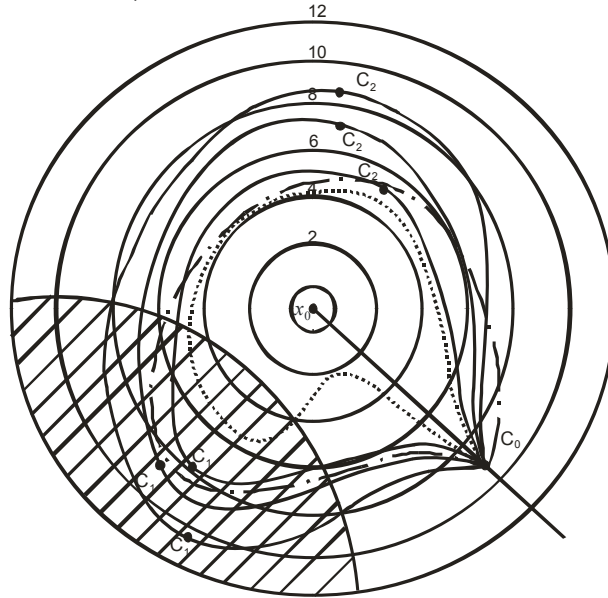


Рис. 3. Локализационные кривые по критериям оптимизации F_n (-), F_τ (- -) и F_s (.....).

Для поиска локализационной кривой по критерию наименьшего времени локализации (F_τ n фиксировано, схема следования $(\delta_1, \dots, \delta_k, \dots, \delta_n)$) и для всех процессов распространения введя дополнительные ограничения

$$\left. \begin{aligned} T_s(x) \leq \tau & \quad \text{для} \quad \delta_s = 1; \\ \bar{F}_s(x) \leq \tau & \quad \text{для} \quad \delta_s = -1. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

целесообразно использовать метод последовательных приближений, положив $\tau = \max \tau_i$. На рисунке 3 показана локализационная кривая F_τ для случая $L_i \in \{L\} - [\tau^2 - \tau^1] < 0,5$.

Что касается поиска локализационной кривой по критерию наименьшей площади локализуемого процесса (F_s), то здесь условия по n и схеме следования аналогичны как и для F_τ , но траектория поиска должна обладать свойством граничности, т.е. $C_0 \notin \bigcup_{i=1}^{n-1} (y^i)'$ при $C_{n-1} \in (\mathcal{E}^{n-1})'$. Локализационная кривая по критерию F_s для схемы следования (1, 1, 1), показана на рисунке 3.

Однако следует отметить, что не для всех процессов может быть принята схема распространения по нормали. Распространение некоторых процессов может быть описано только через элементарные источники, т.е. путем построения огибающей к элементарным множествам (рисунок 4) [5, 6].

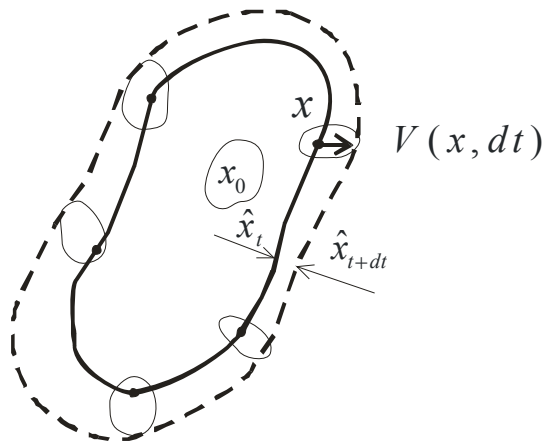


Рис. 4. Схемы развития контуров кривых распространения процессов по огибающим к элементарным множествам

Вместе с тем также следует отметить, что для некоторых процессов локализационная кривая может не удовлетворять условиям замкнутости (рисунок 5 а), начальная точка может не являться конечной точкой оптимальной локализации иной кривой (рисунок 5 б) или появляется угловая точка связанная с взаимопроникновением контуров (рисунок 5 в).

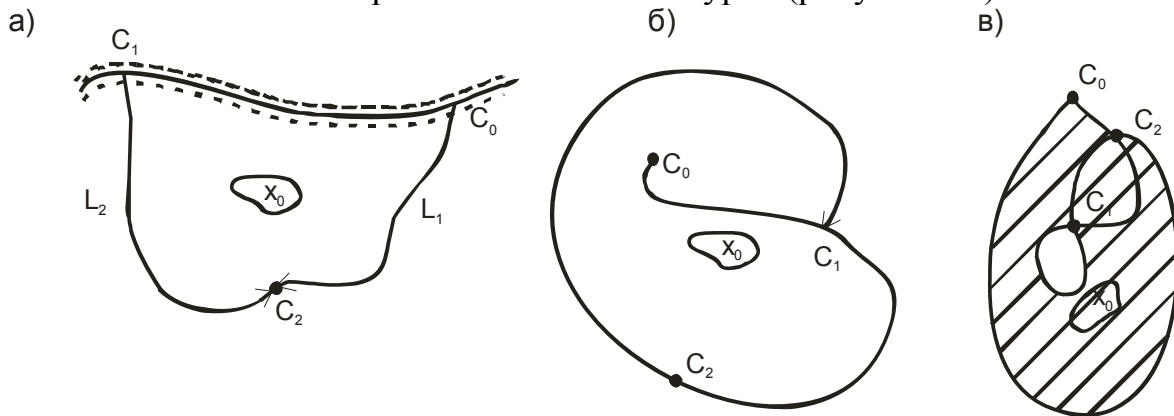


Рисунок 5 – Особые случаи поиска оптимальных локализационных кривых

Преодолеть эти проблемы можно используя метод перехода между точками, позволяющий для любых двух точек плоскости x, y определить время перехода в виде

$$T(x, y) = \min_{L \in \{L(x, y)\}} T_L(x, y), \quad (8)$$

где $\{L(x, y)\}$ - множество гладких кривых, соединяющих точки x, y .

Поставив в соответствие каждому x множество точек

$$v(x, y) = \left\{ y \left(\rho(x, y) \leq \frac{1}{\tau(x, y)} \right) \right\}, \quad (9)$$

методами динамического программирования определяется траектория локализационной кривой для которой выполняется равенство –

$$T(L, x, y) = T(x, y). \quad (10)$$

Реализация метода в области загрязнения подземных вод

Рассмотрим задачу локализационного управления процессом распространения загрязнения подземных вод локальным источником загрязнения (очистные сооружения производственного комплекса в аварийном

состоянии) В качестве критерия оптимизации примем наименьшее время локализации (F_{φ}). Условия формирования локализационной кривой – контуры равномерно расширяющейся окружности без граничных условий с переходом процесса по нормали.

$$\text{Имеем: } \tau^1 = \rho_1 = \frac{\rho_0}{1 + \omega^2}; \sin \varphi = \frac{\omega}{\sqrt{1 + \omega^2}}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\omega}.$$

$$\text{Для } \varphi > \varphi_1 \quad \rho(\varphi) = a \cdot \ell^{y \cdot \varphi}, \text{ где } y = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 - 1}}; a = \frac{\rho_1}{\ell^{y \cdot \varphi_1}}.$$

Критерий оптимизации определяет необходимость выполнения неравенства – $\rho(2\pi) \leq \rho_0$

Тогда для $V(x)=1$, $\omega=4$, $\rho_0=10$ соответственно имеем:

$$\tau^1 = \rho_1 = 2,4; \varphi_1 = 1,33; \alpha = 0,24; y = 0,258; a = 1,74$$

$$\tau^2 = \rho(\varphi_2) = 7,7; \varphi_2 = 5,76; \rho_2 = 4,9; \tau' \approx 8,9.$$

Расчеты показывают, что для равномерно расширяющегося, со скоростью 1 м/сутки, источника загрязнения при скорости окружения 4 м/сутки локализовать его в зоне шириной до 10 м удастся только на 9 сутки.

Заключение

Оптимизация природопользования и природообустройства предполагает синтез знаний и мониторинговой информации по конкретным направлениям решаемых проблем, прогнозную оценку состояния компонентов природной среды и аналитические проработки любых инженерно хозяйственных решений с позиции сохранения равновесия и обеспечение экологической безопасности среды проживания как человека, так и других биологических сообществ и представителей.

Знания математических методов и опыт разработки математического моделирования локализационного управления негативными процессами сегодня, как никогда, более, чем актуален.

Список литературы

1. Бурлибаев, М.Ж. Проблемы оптимизации природопользования и природообустройства в математических моделях и методах / М.Ж. Бурлибаев, А.А. Волчек, П.В. Шведовский. – Алматы: Издательство «Каганат», 2003. – 532 с.
2. Мартыщенко, Л.А. Введение в статистическое моделирование технических систем / Л.А. Мартыщенко. – М.: МО СССР, 1982. – 219 с.
3. Чернышев, М.К. Математическое моделирование иерархических систем / М.К. Чернышев. – М.: Наука, 1998. – С. 44–49.
4. Рапопорт, И.А. Математические аспекты абстрактного анализа систем / И.А. Рапопорт // Исследования по общей теории систем. – М.: Прогресс, 1969. – С. 16–18.

5. Райфа, Г. Анализ решений. Введение в проблему выбора в условиях неопределенности / Г. Райфа. – М.: Наука, 1970. – 402 с.
6. Гурман, В.И. Моделирование процессов в природно-экономических системах / В.И. Гурман. – Новосибирск: Наука, 1982. – 175 с.

Волчек Александр Александрович, декан факультета инженерных систем и экологии Брестского государственного технического университета, доктор географических наук РФ и РБ, профессор, Volchak@tut.by

Образцов Леонид Владимирович, доцент кафедры экономики и организации строительства Брестского государственного технического университета, кандидат технических наук, доцент, olobr@rambler.ru

Шведовский Петр Владимирович, заведующий кафедрой геотехники и транспортных коммуникаций Брестского государственного технического университета, кандидат технических наук, профессор, ofig@bstu.by