УДК 004.02:517.977.1

ПОСТРОЕНИЕ РАСЩЕПЛЯЮЩЕГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ СРЕДСТВАМИ СКМ MATHEMATICA

О.Б. Цехан

Для линейной стационарной сингулярно возмущенной системы с малым параметром при старшей производной части переменных и с запаздыванием в медленных переменных состояния предложен алгоритм построения невырожденное расщепляющее преобразование типа Чанг. Описана процедура построения средствами пакета MATHEMATICA асимптотического приближения по степеням малого параметра расщепляющего преобразования с любой степенью точности. Преобразование приводит исходную двухтемповую систему к двум независимым подсистемам меньшей размерности: отдельно относительно быстрых и медленных переменных.

Введение

Рассматривается линейная стационарная сингулярно возмущенная система с запаздыванием в медленных переменных состояния (ЛССВСЗ):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathrm{A}_1\left(e^{-ph}\right)x(t) + A_2 y(t) + B_1 u(t), x \in R^{n_1}, y \in R^{n_2}, \\ \mu\dot{y}(t) &= \mathrm{A}_3\left(e^{-ph}\right)x(t) + A_4 y(t) + B_2 u(t), u \in R^{r}, t \in T = [0, t_1], \end{aligned} \tag{1}$$

$$x\left(0\right) = x_0,\ y_0(0) = y_0,\ x(\theta, \mu) = \varphi(\theta), \theta \in \left[-h, 0\right). \tag{2}$$

Здесь e^{-ph} – оператор сдвига: $e^{-ph}x(t) = x(t-h)$,

$$\mathrm{A}_i\left(e^{-ph}\right) = A_{i0} + A_{i1}e^{-ph},\ i = 1,3, \tag{3}$$

$A_{ij}, i = 1,3, j = 0,1, A_k, k = 2,4, B_j, j = 1,2,$ – постоянные матрицы подходящих размеров, $h = const > 0$ – запаздывание, μ – малый параметр, $\mu \in (0, \mu^0], \mu^0 \ll 1,$ $\varphi(\theta)$, $\theta \in \left[-h, 0\right)$ – кусочно-непрерывная функция, $u(t)$ – кусочно-непрерывная на T r-вектор-функция управления, $x_0 \in R^{n_1}$, $y_0 \in R^{n_2}$. Пусть $\det A_4 \neq 0$.

Наличие малого параметра μ в виде сомножителя при производных части переменных определяет разнотемповый характер изменения фазовых координат x и y в окрестности точки $\mu = 0$.

При решении задач анализа и управления сложными объектами часто возникают проблемы, обусловленные высокой размерностью моделей и наличием разнотемповых переменных. В связи с этим актуальной является проблема декомпозиции больших моделей на модели меньшей размерности, с разделенными по темпам движениям. Применение методов декомпозиции для анализа и синтеза сложных систем позволяет упрощать и распараллеливать алгоритмы, обеспечивает возможность управления различными частями систем. Расщепление можно рассматривать как один из способов декомпозиции систем со многими входами и выходами на несвязные или слабосвязаные подсистемы. Для систем с малым параметром при части старших производных возможность декомпозиции обусловлена естественным образом благодаря наличию малого параметра и позволяет расщепить исходную СВС на независимые подсистемы меньшей размерности.

Впервые невырожденное линейное преобразование для нестационарной линейной СВС без запаздывания с малым параметром при старших производных части переменных предложено в [1] и применено для полного расщепления исходной системы с быстрыми и медленными переменными на две независимые подсистемы в [2, 3]. Матрицы, участвующие в формировании преобразования Чанг, являются решениями алгебраических уравнений Риккати и Сильвестра. Их нахождение является ключевым шагом в построении этого преобразования. В [3] построена аппроксимация первого порядка для решения соответствующего уравнения Риккати из ряда Маклорена. Там же отмечается, что получение аппроксимации более высокого порядка является механическим повторением случая аппроксимации первого порядка.

Обобщение преобразования Чанг для декомпозиции линейных сингулярно возмущенных медленно изменяющихся во времени систем предложено в [4,5]. В [5] доказана теорема о разложении в ряда Маклорена матричных компонент линейного преобразования и об итерационном нахождении элементов p-го порядка аппроксимации этих рядов. Основываясь на итерационном решении, предложено понятие аппроксимации p-го порядка преобразования Чанг, а также расщепленной системы, быстрой и медленной подсистем. Расщепляющее преобразование Чанг изложено в [6], там же имеются ссылки на некоторые обобщения этого преобразования, указывается важная роль расщепляющих преобразований в теории управления и предложены основанные на декомпозиции параллельные алгоритмы оптимального управления крупномасштабными процессами для линейных и билинейных систем. Обобщение преобразования Чанг на системы со многими временными масштабами представлено в [7,8].

Для СВС с запаздыванием расщепляющие преобразования типа Чанг строились в работах [9-11]. В [9] доказывается существование непрерывного по малому параметру линейного преобразования координат для частичной декомпозиции СВС с распределенным и сосредоточенным запаздыванием, в результате которого в преобразованной системе связь между быстрыми и медленными переменными имеется только через переменные с запаздыванием. Замена переменных типа Чанг для ЛССВС управления с постоянным (не малым) запаздыванием в состоянии, построенное в [10], осуществляется линейным оператором с конечным числом операторов сдвига и приводит исходную СВС с одним запаздыванием в состоянии и без запаздывания в управлении к разделенным подсистемам: медленной со многими запаздываниями в состоянии и управлении и неоднородностью, зависящей от начальных условий, и быстрой с одним запаздыванием в переменной состояния и с неоднородностью.

В работе [11] построена замена переменных, обобщающая преобразование Чанг на линейные стационарные СВС функционально-дифференциальных уравнений с малым сосредоточенным и распределенным запаздыванием в быстрых переменных. Замена расщепляет исходную систему на медленную систему обыкновенных дифференциальных уравнений и быстрые функциональные уравнения. Доказано, что преобразование может быть найдено в виде асимптотического разложения.

Задача. Обосновать алгоритм и реализовать средствами СКМ MATHEMATICA итерационную схему построения с любой степенью точности асимптотического разложения расщепляющего преобразования, приводящего ЛССВСЗ (1) к двум независимым подсистемам меньшей размерности (отдельно относительно быстрых и медленных переменных).

Невырожденное преобразование

Построим невырожденное преобразование типа Chang [8], расщепляющее ЛССВСЗ (1) на 2 подсистемы: отдельно относительно медленных и быстрых переменных. Для этого введем замену переменных вида:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \mathsf{T}\left(\mu, e^{-ph}\right)\begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix},\ \xi(t) \in R^{n_1},\ \eta(t) \in R^{n_2},\ t \in T\ , \tag{4}$$

$$\mathsf{T}\left(\mu, e^{-ph}\right) = \begin{pmatrix} E_{n_1} & \mu \mathsf{H}\left(\mu, e^{-ph}\right) \\ -\mathsf{L}\left(\mu, e^{-ph}\right) & E_{n_2} - \mu \mathsf{L}\left(\mu, e^{-ph}\right)\mathsf{H}\left(\mu, e^{-ph}\right) \end{pmatrix}, \tag{5}$$

Здесь $\mathsf{H}\left(\mu, e^{-ph}\right), \mathsf{L}\left(\mu, e^{-ph}\right)$– матричные операторы, зависящие от параметра, которые являются решениями матричных операторных уравнений

$$\mathsf{A}_3 - A_4\mathsf{L} + \mu \mathsf{L}\,\mathsf{A}_1 - \mu \mathsf{L}\,A_2\mathsf{L} = 0, \tag{6}$$

$$\mu\left(\mathsf{A}_1 - A_2\mathsf{L}\right)\mathsf{H} - \mathsf{H}\left(A_4 + \mu \mathsf{L}\,A_2\right) + A_2 = 0. \tag{7}$$

Здесь и далее с целью сокращения записей там, где это не приводит к неоднозначному пониманию, аргументы у матричных операторов $\mathsf{A}_i\left(e^{-ph}\right), i = 1,3$, $\mathsf{H}\left(\mu, e^{-ph}\right)$, $\mathsf{L}\left(\mu, e^{-ph}\right)$ будем опускать.

Лемма (о решении матричных уравнений). Если $\det A_4 \neq 0$, то найдется $\mu^* > 0$ такое, что для $\forall \mu \in \left[0, \mu^*\right]$ существует непрерывно зависящее от μ решение $\mathsf{H}\left(\mu, e^{-ph}\right)$, $\mathsf{L}\left(\mu, e^{-ph}\right)$ системы матричных операторных уравнений (6),(7), которое может быть найдено с любой степенью точности в виде асимптотических рядов

$$\mathsf{L}\left(\mu, e^{-ph}\right) = \sum_{i=0}^{k} \mu^i \mathsf{L}^i\left(e^{-ph}\right) + O\left(\mu^{k+1}\right),\ \ \mathsf{H}\left(\mu, e^{-ph}\right) = \sum_{i=0}^{k} \mu^i \mathsf{H}^i\left(e^{-ph}\right) + O\left(\mu^{k}\right), \tag{8}$$

где члены асимптотических рядов (8) рассчитываются согласно итерационной схеме

$$\mathsf{L}^{i+1}\left(e^{-ph}\right) = A_4^{-1}\left(\mathsf{L}^i\left(e^{-ph}\right)\mathsf{A}_1\left(e^{-ph}\right) - \sum_{j=0}^{i} \mathsf{L}^{i-j}\left(e^{-ph}\right)A_2\mathsf{L}^j\left(e^{-ph}\right)\right) \tag{9}$$

$$\mathsf{L}^0\left(e^{-ph}\right) = A_4^{-1}\mathsf{A}_3\left(e^{-ph}\right) \tag{10}$$

$$\mathsf{H}^{i+1}\left(e^{-ph}\right)=$$

$$=A_4^{-1}\left(\mathsf{A}_1\left(e^{-ph}\right)\mathsf{H}^i\left(e^{-ph}\right)-\sum_{j=0}^{i}\left(A_2\mathsf{L}^j\left(e^{-ph}\right)\mathsf{H}^{i-j}\left(e^{-ph}\right)-\mathsf{H}^j\left(e^{-ph}\right)\mathsf{L}^{i-j}\left(e^{-ph}\right)A_2\right)\right),$$

$$\mathsf{H}^0\left(e^{-ph}\right)=A_2A_4^{-1}. \qquad (12)$$

Лемма доказывается аналогично [2].

На основании (4)-(7) с учетом леммы доказывается

Теорема (о расщепляющем преобразовании). Если $\det A_4 \neq 0$, то найдется $\mu^* > 0$ такое, что в результате замены переменных (9), (10), (12), (13) $\forall\mu\in\left[0,\mu^*\right]$ ЛССВСЗ (1), (2) преобразуется в эквивалентную систему с разделенными движениями

$$\begin{aligned}&\dot{\xi}(t)=\left(\mathsf{A}_1-A_2\mathsf{L}\right)\xi(t)+\left(B_1-\mathsf{H}B_2-\mu\mathsf{HL}B_1\right)u(t),\\&\mu\dot{\eta}(t)=\left(A_4+\mu\mathsf{L}A_2\right)\eta(t)+\left(B_2+\mu\mathsf{L}B_1\right)u(t),\end{aligned} \qquad (21)$$

с начальными условиями

$$\xi(\theta)=A_4^{-1}\mathsf{A}_3\left(e^{-ph}\right)\varphi(\theta)+O(\mu),\ \theta\in[-h,0)$$

$$\xi(0)=A_4^{-1}\mathsf{A}_3\left(e^{-ph}\right)x_0+O(\mu),$$

$$\eta(0)=\left(A_4^{-1}\mathsf{A}_3\left(e^{-ph}\right)+O(\mu)\right)x_0+y_0.$$

Алгоритм построения невырожденного преобразования.

1. Задать параметры системы (1), (2) $A_{ij}, i=1,3, j=0,1, A_k, k=2,4, B_j, j=1,2,$ $\mathsf{A}_i\left(e^{-ph}\right)=A_{i0}+A_{i1}e^{-ph},\ i=1,3$.
2. Проверить выполнение условия $\det A_4\neq 0$.
3. Вычислить A_4^{-1}.
4. Задать начальные условия (19), (20) при $k=0$.
5. Для $k=0,1,2,...$ по формулам (9), (11) рассчитывать члены асимптотических рядов $\mathsf{L}^{k+1}\left(e^{-ph}\right)$, $\mathsf{H}^{k+1}\left(e^{-ph}\right)$.
6. Рассчитать асимптотические приближения (8).
7. Сформировать асимптотическое приближение матрицы (5) невырожденного преобразования (4).

Реализация расщепляющего преобразования средствами СКМ MATHEMATICA

СКМ MATHEMATICA предоставляет весь набор функций, необходимый для реализации построения асимптотики разложения (8) согласно описанному выше алгоритму.

Ниже приведен пример ноутбука для построения асимптотического приближения невырожденного преобразования типа Чанг для ЛССВСЗ (1), (2) при $n_1=n_2=2$ в соответствии с представленным выше алгоритмом.

```
(*1. Задание параметров системы *)
```

$A10 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

$A11 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$

$A30 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

$A31 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

$A2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

$A4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$

$B1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$

$B2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};$

```
A1 = A10 + A11 * Exp[-p];
A3 = A30 + A31 * Exp[-p];

If[Det[A4] == 0, Print["Преобразование не определено. Вычисления заканчиваем"],
  Print["A4^{-1}="]];

A4^{-1}=

(*3. Вычисляем A4^{-1}*)
A41 = Inverse[A4];

(*4. Задаем начальные условия (10), (11)*)
L[0] = A41.A3;
H[0] = A2.A41;

(*5. Рассчитываем члены асимптотических рядов (9),(11) *)
k = 2;
Do[L[i + 1] = A41.(L[i].A1 - Sum[L[i - j].A2.L[j], {j, 0, i}]), {i, 0, 2}]
Do[H[i + 1] = A41.(A1.H[i] - Sum[A2.L[j].H[i - j] - H[j].L[i - j].A2, {j, 0, i}]), {i, 0, 2}]

(*6. Рассчитываем асимптотические приближения (8) k-го порядка*)
Lk = Sum[μ ^ i * L[i], {i, 0, k}];
Hk = Sum[μ ^ i * H[i], {i, 0, k}];

    (*7. Сформируем матрицу (5) невырожденного преобразования (4) *)
```

$(*Tk = \begin{pmatrix} \text{IdentityMatrix[2]} & \mu * \text{Hk} \\ -\text{Lk} & \text{IdentityMatrix[2]}-\mu * \text{Lk.Hk} \end{pmatrix};*)$

```
    J1 = Transpose[Join[IdentityMatrix[2], Transpose[μ * Hk]]];
    J2 = Transpose[Join[Transpose[-Lk], Transpose[IdentityMatrix[2] - μ * Lk.Hk]]];
    Tk = Join[J1, J2];
    Print["Tk=", MatrixForm [Tk]]
```

$$Tk=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \mu\left(1+\mu+\left(1+e^{-2p}-e^{-p}\right)\mu^2\right) & 0 \\ 0 & 1 & \mu\left(e^{-p}\mu+e^{-p}\mu^2\right) & 0 \\ e^{-p}\mu+e^{-p}\mu^2 & -1-\left(-e^{-2p}+e^{-p}\right)\mu^2 & 1-\mu\left(\left(-e^{-p}\mu-e^{-p}\mu^2\right)\left(1+\mu+\left(1+e^{-2p}-e^{-p}\right)\mu^2\right)+\left(e^{-p}\mu+e^{-p}\mu^2\right)\left(1+\left(-e^{-2p}+e^{-p}\right)\mu^2\right)\right) & 0 \\ e^{-2p}\mu-e^{-2p}\mu^2 & e^{-p}-\left(e^{-3p}-e^{-2p}\right)\mu^2 & -\mu\left(\left(e^{-p}\mu+e^{-p}\mu^2\right)\left(-e^{-p}+\left(e^{-3p}-e^{-2p}\right)\mu^2\right)+\left(-e^{-2p}\mu+e^{-2p}\mu^2\right)\left(1+\mu+\left(1+e^{-2p}-e^{-p}\right)\mu^2\right)\right) & 1 \end{pmatrix}$$

Заключение

Реализованное в работе расщепляющее преобразование позволяет выполнить декомпозицию линейной стационарной сингулярно возмущенной системы с запаздыванием на две независимые подсистемы меньшей размерности: отдельно относительно быстрых и медленных переменных.

Расщепляющее преобразование может быть построено с любой степенью точности в виде асимптотического разложения по степеням малого параметра. При этом в соответствии с формулами (9), (11) алгоритм декомпозиции может быть реализован в виде программ для систем компьютерной алгебры. Система компьютерной математики MATHEMATICA предоставляет весь набор функций, необходимый для реализации построения асимптотики разложения (8) с любой наперед заданной степенью точности.

Применение построенного невырожденного преобразования позволяет понизить порядок рассматриваемой ЛССВСЗ и свести решение ряда задач устойчивости, управления и оценивания для больших систем с сингулярными возмущениями к системам меньшей размерности, независящим от малого параметра. В [12] такой подход реализован для решения задачи управления медленной частью спектра ЛССВСЗ линейным динамическим регулятором по медленным переменным.

Благодарности. Работа поддержана Министерством образования Республики Беларусь в рамках государственной программы научных исследований Республики Беларусь на 2016–2020 годы (шифр задания "Конвергенция А42-16").

Список литературы

1. Chang, K. Singular perturbations of a general boundary value problem / K. Chang // SIAM J. Math. Anal. – 1972. – Vol. 3. P. 520 – 526.
2. Kokotovic, P.V. Controllability and Time-Optimal Control of Systems with Slow and Fast Modes / P.V. Kokotovic, A.H. Haddad // IEEE Trans. on Automatic Control. – 1975. – Vol.20, № 1. – P.111-113.
3. Kokotovic, P.V. Singular Perturbations Methods in Control: Analysis and Design / P.V. Kokotovic, H.K. Khalil, J. O'Reilly, J. NY: Academic Press. – 1986 – 371p.
4. Yang, X. A Generalization of Chang Transformation for Linear Time-Varying Systems / X. Yang, J.J. Zhu // Proceedings, IEEE Conference on Decision and Control (CDC), Atlanta, GA. – 2010. – P. 6863-6869.
5. Yang, X. Chang Transformation for Decoupling of Singularly Perturbed Linear Slowly Time-Varying Systems / X.Yang, J.J. Zhu // 51st IEEE Conference on Decision and Control December 10-13. Maui, Hawaii, USA. – 2012. – P. 5755-5760.
6. Gajic, Z. Parallel Algorithms for Optimal Control of Large Scale Linear Systems / Z. Gajic, X. Shen. London: Springer Verlag, 1993. – 455p.
7. Prljaca, N. General Transformation for Block Diagonalization of Multitime-Scale Singularly Perturbed Linear Systems. / N. Prljaca, Z. Gajic // IEEE Trans. on Automatic Control. – 2008. – Vol.53, №5. – P.1303-1305.
8. Курина, Г.А. О полной управляемости разнотемповых сингулярно возмущенных систем / Г.А. Курина // Матем. заметки. – 1992. – Т. 52, выпуск 4. – С. 56– 61.

9. Magalhaes, L.T. Exponential estimates for singularly perturbed linear fuctional differential equations / L.T. Magalhaes // J. Math. Anal. Appl. 1984. – № 103. – P.443-460.
10. Копейкина, Т.Б. Управляемость линейных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием / Т.Б. Копейкина // Актуальные задачи теории динамических систем управления. Минск: Наука и техника. – 1989. – С.139-147. (Kopeikina, T.B. Some approaches to the controllability investigation of singularly perturbed dynamic systems / T.B.Kopeikina // Systems Science. - 1995. - V.21, No.1. -P.17–36.)
11. Fridman, E. Decoupling Transformation of Singularly Perturbed Systems with Small Delays and Its Applications / E. Fridman. // Z. Angew. Math. Mech. Berlin. – 1996. – Vol.76, № 2. – P. 201-204.
12. Цехан, О.Б. Регулятор назначения спектра линейной стационарной сингулярно возмущенной системы второго порядка с запаздыванием / О.Б. Цехан. //Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: Тез.докл.8-го междунар. науч. семинара. 14-19 сент. 2015г., Минск, Беларусь. – Минск: ИМ НАНБ, 2015. – С.86.

Цехан Ольга Борисовна, заведующая кафедрой математического и информационного обеспечения экономических систем Гродненского государственного университета имени Янки Купалы, кандидат физико-математических наук, доцент, tsekhan@grsu.by