

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ВЫПУСКА ВАЛОВОГО РЕГИОНАЛЬНОГО ПРОДУКТА СРЕДСТВАМИ MAPLE

Цехан О. Б., Косач К.Г.

В настоящей работе реализован один из подходов к параметрической идентификации модели для анализа и прогнозирования динамики выпуска валового регионального продукта на основе модели в виде дифференциального уравнения на данных Гродненского региона. Реализация осуществляется с помощью программного пакета Maple 15.

Введение

В параметрической идентификации моделей технических систем наиболее популярным является статистический подход, в рамках которого задача идентификации сводится к определению параметров распределения [1]. К сожалению, при малом числе наблюдений статистические оценки часто оказываются ненадежными [2].

В настоящей работе объектом моделирования является динамическая система выпуска валового регионального продукта Гродненской области. Предполагается, что динамика ВРП может быть описана моделью, аналогичной представленной в работе Р. М. Нижегородцева [3, с.100] в виде неоднородного дифференциального линейного уравнения второго порядка:

$$m \frac{d^2 w(t)}{dt^2} + b \frac{dw(t)}{dt} - cw(t) = f(t-h), \quad (1)$$

где t – непрерывное время; $w(t)$ – ВРП в году t ; $f(t)$ – объем инвестиций в основной капитал в году t ; параметр $m > 0$ – мера инерции хозяйственной системы; $b > 0$ – мера сопротивления переменам; $c > 0$ – норма накопления, $0 \leq h$ – запаздывание, с которым проявляется эффект от инвестиций.

При идентификации запаздывания в работе [4, с. 168] на основе эконометрического моделирования и дискретизации модели (1) установлено, что наиболее адекватным является запаздывание 3 года. Эту гипотезу примем также в настоящем исследовании.

Модель (1) представляет динамику изменения ВРП в виде решения линейного неоднородного дифференциального уравнения и зависимость динамики ВРП от динамики инвестиций.

В качестве исходных данных для идентификации использованы показатели по Гродненской области за 2008-2015 ВРП (в млрд. бел.руб.): 10438,2; 11563,8; 13200,1; 22446,5; 41419,9; 53382,3; 66418,7; 68 625,40; инвестиций в основной капитал (в млрд. бел. руб.) за 2005-2015: 1615,3; 2222,3; 2900,9; 4250,9; 5012,6; 5829; 10692,1; 18526,5; 24058,4; 27607,80; 27526,20. Источником данных по региону является официальный сайт статистического комитета РБ [5]. Идентификация выполняется с использованием идей метода наименьших квадратов.

Формальная постановка задачи

Имеются временные ряды показателей ВВП $W(t)$ и инвестиций в основной капитал $f(t)$. Предполагаем, что связь между функциями $w(t)$ и $f(t)$ выражается ДУ второго порядка (1). Определить значения неизвестных параметров m , b , c и так, чтобы решение ДУ (1) было максимально «близко» к реальной динамике ВВП.

Таким образом, при параметрической идентификации модели (1) для процесса, заданного наблюдаемыми значениями ВВП и инвестиций, определению подлежат: параметры m , b , c , h , функция $f(t)$, тип задачи (Коши, граничная), точки задания начальных (граничных) условий.

Реализация алгоритма

Представим следующий обобщенный алгоритм идентификации при фиксированном значении h . Будем проводить параллельную реализацию в программном пакете Maple 15.

1. Определяем дифференциальное уравнение (1) с заданной непрерывной функцией $f(t-3)$ на основе временного ряда инвестиций в основной капитал. *restart*;

$$\text{deq1} := m * \text{diff}(w(t), t) + b * \text{diff}(w(t), t) - c * w(t) = 484.52 * (t - 3)^2 - 2333.6 * (t - 3) + 4527.2;$$

Задаем граничные условия:

$$\text{cond} := w(4) = 22446.5, w(7) = 66418.7; \quad (2)$$

Решаем граничную задачу:

$$Y1 := \text{dsolve}(\{\text{deq1}, \text{cond1}\}, w(t));$$

Получаем определенный вид функции, который можно увидеть графически, задав следующую команду:

$$\text{plot}(\text{"вставляем вид функции Y1"}, x = 0..8, y = 0..90000);$$

2. Далее решаем задачу минимизации по параметрам m , b , c функции суммы квадратов отклонений от реальных наблюдаемых значений функции ВВП $w(t)$ как решения граничной задачи для (2) и квадратов отклонений скорости изменений $w(t)$ от наблюдаемых темпов роста ВВП.

Формализованное представление соответствующей критериальной функции имеет вид:

$$\varepsilon_p = \sum_{i=1}^8 (w(m, b, c, i) - W_i)^2 + \sum_{i=1}^8 (\dot{w}(m, b, c, i) - (W_{i+1} - W_i))^2 \rightarrow \min_{m, b, c \geq 0} \quad (3)$$

где индекс i соответствует порядковому номеру года, начиная с 2008 (2008→1, 2009→2 и т.д.), $w(m, b, c, i)$ – решение соответствующей граничной задачи для (1), W_i – наблюдаемое значение ВВП в i -м году, \dot{w}_i – значение первой производной.

Для этого на данном этапе вычисляем производную функции $Y1$.

$DD := \text{diff}(\text{"ссылка на функцию } Y1", t);$

Затем поочередно подставляем индекс i года в решение $Y1$ и производную DD . Для примера укажем подстановку для года с индексом $i = 1$.

$w1 := \text{subs}(t = 1, Y1);$

$D1 := \text{subs}(t = 1, DD);$

После того, как была произведена подстановка вплоть до последнего года, необходимо определить функцию (3), которую будем минимизировать.

Для этого формируем ε_p :

$\varepsilon_p := (\text{"вид функции } w1" - 10438.2)^2 + (\text{"вид функции } w2" - 11563.8)^2 + \dots +$
 $+ (\text{"вид функции } w8" - 68625.4)^2 + (\text{"вид функции } D1" - 1125.6)^2 + \dots +$
 $+ (\text{"вид функции } D7" - 2206.7)^2, m \geq 0, b \geq 0, c \geq 0;$

Затем оптимизируем сформированную функцию:

$\text{Optimization}[\text{Minimize}](\text{Optimization}[\text{Prep}]("ссылка на функцию } Y"))$

Проделав вышеуказанную последовательность команд, Maple выдаст следующие значения параметров и величину функции ε_p :

$\varepsilon_p = 1.1543 * 10^9 [b = 0, c = 0.3878, m = 5.7123].$

Таким образом, идентифицированная модель имеет вид:

$$5,7123 \frac{d^2 w(t)}{dt^2} + 0 \frac{dw(t)}{dt} - 0,3878 w(t) = 484,52 (t-3)^2 - 2333,6 (t-3) + 4527,2, t = \overline{1,8} \quad (4)$$

3. Для оценки идентифицированной модели (4) решим задачу Коши для модели (1) с параметрами, оцененными на шаге 2.

$\text{restart};$

$\text{deq1} := 5.7123 * \text{diff}(w(t), t\$2) + 0 * \text{diff}(w(t), t) - 0.3878 * w(t) =$
 $= 484.52 * (t-3)^2 - 2333.6 * (t-3) + 4527.2;$

Укажем начальные условия:

$\text{cond1} := w(1) = 10438.2, D(w)(1) = 1125.6;$

Решаем:

$Y2 := \text{dsolve}(\{\text{deq1}, \text{cond1}\}, w(t));$

Затем аналогично шагу 2 подставляем поочередно в полученное решение индексы года i :

$w := \text{subs}(t = 2, \text{"вид функции } Y1");$

Для приближенного вычисления выполним команду evalf , щелкнув по выражению w правой клавишей мыши и выбрав подпункт Approximate , в

которой можно самостоятельно выбрать точность приближения.

4. В результате вычисления получаем расчетные значения ВРП, которые визуально сравниваются для верификации построенной модели.

Для сравнения расчетных и наблюдаемых значений изобразим их графически. Чтобы отобразить на графике наблюдаемые значения и полученное решение Y_2 , подключим библиотеку *plots* и с помощью команды *display* совместим два графика:

```
with(plots);
```

```
dannye:=plot([[1,10438.2], [2,11563.8], [3,13200.1], [4,22446.5], [5,41419.9],  
[6,53382.3], [7,66418.7], [8,68625.40]]);
```

```
y2:=plot(["вид функции Y2"]);
```

```
display([dannye,y2]);
```

В результате выполнения указанных команд, Maple представит график, вид которого можно корректировать, кликнув на изображении правой кнопкой мыши и выбрав необходимые настройки (рис. 1.):

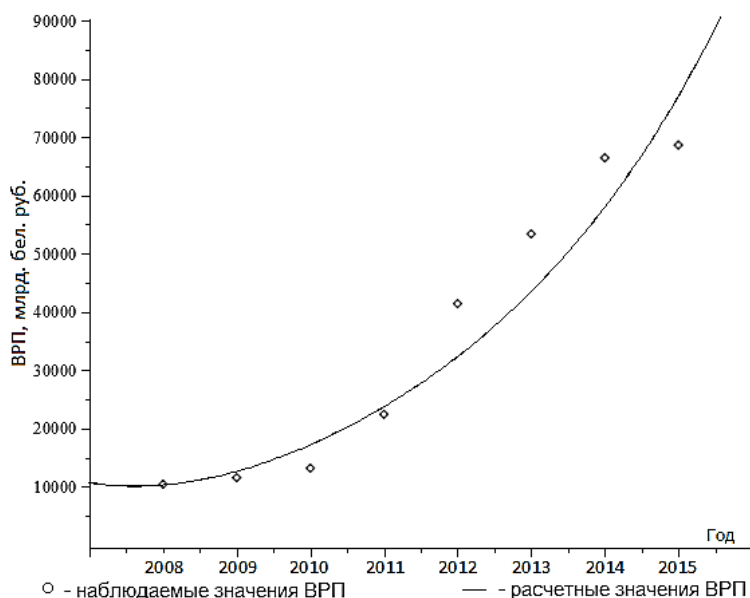


Рис. 1. Наблюдаемые и расчетные значения ВРП согласно модели (4).

Заключение

Реализуя один из подходов к параметрической идентификации модели динамики выпуска валового регионального продукта на основе модели в виде дифференциального уравнения, можно сказать, что программный пакет Maple позволил практически полностью автоматизировать необходимые вычисления для данной задачи. Среди них: задача Коши, граничная задача, решение дифференциального уравнения второго порядка, графическое представление промежуточных и конечных результатов.

Список литературы

1. Kalman, P.E. Noised systems identification Text. / P. E. Kalman // *Advances of Mathematical sciences*. 1985 - V. 40, issue 4(244).
2. Дилигенская, А.Н. Идентификация объектов управления: Учеб. пособ./ А. Н. Дилигенская – Самара: Самар. гос. техн. ун-т., 2009.– 136 с.
3. Нижегородцев, Р.М. Информационная экономика. Книга 2. Управление беспорядком: Экономические основы производства и обращения информации / Р. М. Нижегородцев. - Москва - Кострома, 2002. - 173 с.
4. Косач, К. Г. Идентификация модели в пространстве состояний динамической системы выпуска валового регионального продукта Гродненской области/К. Г. Косач, О. Б. Цехан // *Наука-2015: сб. науч. ст. В 2 ч. Ч. 2* / ГрГУ им. Я. Купалы; редкол.: Г. М. Третьяков (гл. ред.) [и др.]. – Гродно: ГрГУ, 2015. –292 с.
5. Зиновский, В. И. Беларусь в цифрах / В. И. Зиновский // *Статистический сборник [Электронный ресурс]*. - 2014. - Режим доступа: http://belstat.gov.by/bgd/public_compilation/index_131/. - Дата доступа: 22.03.2016.

Цехан Ольга Борисовна, и.о. зав. кафедрой МИОЭС факультета экономики и управления УО «Гродненского государственного университета им. Янки Купалы», кандидат физико-математических наук, доцент, tsekhan@grsu.by

Косач Кристина Геннадьевна, студентка 5 курса факультета экономики и управления УО «Гродненского государственного университета им. Янки Купалы», dilfinium_kristi@mail.ru