УДК 519.872

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОГРАНИЧЕННЫМ ВРЕМЕНЕМ ОЖИДАНИЯ ЗАЯВОК И НЕНАДЕЖНЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ

С.Э. Статкевич

Проведено исследование открытой сети массового обслуживания с ограниченным временем ожидания заявок и ненадежными системами обслуживания. Общее число обрабатываемых заявок в сети ограниченно и изменяется в соответствии с процессом гибели и размножения. Получена система дифференциальных уравнений для определения среднего относительного числа заявок и среднего относительного числа исправных линий обслуживания в каждой из систем сети в произвольный момент времени.

Введение

Рассмотрим $(n+1)-$узловую открытую сеть массового обслуживания (МО) с однотипными заявками, общее число которых изменяется с течением времени. Пусть $S_0, S_1, ..., S_n$ системы массового обслуживания (СМО), между которыми циркулируют заявки. Система S_i, $i=\overline{0,n}$, содержит m_i идентичных линий обслуживания, обслуживающих заявки по показательному закону с интенсивностью μ_i, $i=\overline{0,n}$. Линии обслуживания могут подвергаться случайным поломкам. Время исправной работы каждой линии системы S_i имеет показательную функцию распределения с параметром β_i, $i=\overline{0,n}$. После поломки линия немедленно восстанавливаться и время восстановления также имеет показательную функцию распределения с параметром γ_i, $i=\overline{0,n}$. Будем предполагать, что если во время обслуживания некоторой заявки линия обслуживания вышла из строя, то после окончания восстановления линии прерванная заявка дообслуживается.

После окончания обслуживания в системе S_i заявка немедленно поступает в систему S_j с вероятностью p_{ij}, $i,j=\overline{0,n}$, $\sum\limits_{j=0}^{n} p_{ij}=1$, $i=\overline{0,n}$. Если поступившая в S_i заявка находит хотя бы одну линию обслуживания исправной и свободной от других заявок, то она немедленно начинает обслуживаться и время обслуживания является показательной случайной величиной с параметром μ_i, $i=\overline{0,n}$. Длительность пребывания заявки в очереди $i-$ой СМО является случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону с параметром θ_i, и не зависит от других факторов, например, от времени пребывания в очереди других заявок. Заявка, время ожидания которой в очереди системы S_i истекло, переходит в очередь системы S_j с вероятностью q_{ij}, $i=\overline{0,n}$, $j=\overline{0,n}$. Матрицы $P=\left\|p_{ij}\right\|_{(n+1)\times(n+1)}$ и $Q=\left\|q_{ij}\right\|_{(n+1)\times(n+1)}$ являются матрицами вероятностей переходов неприводимых марковских цепей.

Кроме того, будем считать, что число заявок в системе S_0 определяется процессом гибели и размножения, который генерирует новые заявки с интенсивностью λ_0^+ и уничтожает существующие с интенсивностью λ_0^-. Следовательно, исследуемая сеть, представляет собой открытую сеть массового обслуживания, общее число заявок в которой изменяется в соответствии с процессом гибели и размножения, протекающим в системе S_0. Общее число заявок в сети ограничено константой K. Дисциплины обслуживания заявок в системах – FIFO. Тогда состояние сети будет определяться вектором

$$z(t)=\left(d(t),\,k(t)\right)=\left(d_0(t),d_1(t),...,d_n(t),k_0(t),k_1(t),...,k_n(t)\right), \qquad (1)$$

где $d_i(t)$ и $k_i(t)$ соответственно количество исправных линий обслуживания и число заявок в системе S_i в момент времени t, $0\le d_i(t)\le m_i$, $0\le k_i(t)\le K$, $t\in[0,+\infty)$, $i=\overline{0,n}$. В силу вышеописанного, вектор (1) является марковским случайным процессом с непрерывным временем и конечным числом состояний. Общее число обслуживаемых заявок в сети в момент времени t составляет $K(t)=\sum\limits_{i=0}^{n}k_i(t)$.

Предположим, что времена обслуживания заявок в линиях, длительности исправной работы линий и времена восстановления линий обслуживания являются независимыми случайными величинами. Проведем асимптотический анализ марковского процесса (1) при большом числе заявок. Используем технику, представленную в работах [1, 2]. Также предположим, что сеть функционирует в условии большой загрузки заявками, то есть значение $K(t)$ достаточно велико, но ограниченно, $0<<K(t)\le K$.

Система уравнений для вероятностей состояний

Пусть

$$P(d,k,t)=P\left(d(t)=d,k(t)=k\right),$$

где

$$d=\left(d_0,d_1,...,d_n\right),\; 0\le d_i\le m_i,$$

$$k=\left(k_0,k_1,...,k_n\right),\; 0\le k_i\le K(t),\; i=\overline{0,n}.$$

Обозначим через I_i – $(n+1)$-вектор с нулевыми компонентами, за исключением $i-$ой, равной 1. Опишем возможные переходы марковского процесса $z(t)$ в состояние $z(t+\Delta t)=(d,k,t+\Delta t)$ за время Δt:

- из состояния (d,k,t) переход с вероятностью

$$1-\left\{\lambda_0^-k_0(t)+\lambda_0^+\left(K-\sum_{i=0}^{n}k_i(t)\right)+\sum_{i=0}^{n}\Big[\mu_i\min\left(d_i(t),k_i(t)\right)+\right.$$

$$+\theta_i\left(k_i(t)-d_i(t)\right)u\left(k_i(t)-d_i(t)\right)+\beta_i\, d_i(t)+\gamma_i\left(m_i-d_i(t)\right)\Big]\Big\}\Delta t+o(t);$$

- из состояния $\left(d-I_i,k,t\right)$ – с вероятностью

$$\left[\gamma_i\left(m_i-d_i(t)+1\right)\Delta t+o(\Delta t)\right]\times$$

$$\times\Bigg[1-\Bigg\{\lambda_0^-k_0(t)+\lambda_0^+\left(K-\sum_{i=0}^{n}k_i(t)\right)+\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\Big[\mu_j\min\left(d_j(t),k_j(t)\right)+$$

$$+\theta_j\left(k_j(t)-d_j(t)\right)u\left(k_j(t)-d_j(t)\right)+\beta_j d_j(t)+\gamma_j\left(m_j-d_j(t)\right)\Big]+$$

$$+\Big[\mu_i\min\left(d_i(t)-1,k_i(t)\right)+\theta_i\left(k_i(t)-d_i(t)+1\right)u\left(k_i(t)-d_i(t)+1\right)+$$

$$+\beta_i\left(d_i(t)-1\right)\Big]\Bigg\}\Delta t+o(\Delta t)\Bigg],\ i=\overline{1,n};$$

- из состояния $\left(d+I_i,k,t\right)$ – с вероятностью

$$\left[\beta_i\left(d_i(t)+1\right)\Delta t+o(\Delta t)\right]\times$$

$$\times\Bigg[1-\Bigg\{\lambda_0^-k_0(t)+\lambda_0^+\left(K-\sum_{i=0}^{n}k_i(t)\right)+\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\Big[\mu_j\min\left(d_j(t),k_j(t)\right)+$$

$$+\theta_j\left(k_j(t)-d_j(t)\right)u\left(k_j(t)-d_j(t)\right)+\beta_j d_j(t)+\gamma_j\left(m_j-d_j(t)\right)\Big]+$$

$$+\Big[\mu_i\min\left(d_i(t)+1,k_i(t)\right)+\theta_i\left(k_i(t)-d_i(t)-1\right)u\left(k_i(t)-d_i(t)-1\right)+$$

$$+\gamma_i\left(m_i-d_i(t)-1\right)\Big]\Bigg\}\Delta t+o(\Delta t)\Bigg],\ i=\overline{1,n};$$

- из состояния $\left(d,k+I_0,t\right)$ – с вероятностью

$$\left[\lambda_0^-\left(k_0(t)+1\right)\Delta t+o(\Delta t)\right]\times$$

$$\times\Bigg[1-\Bigg\{\lambda_0^+\left(K-\sum_{i=0}^{n}k_i(t)-1\right)+\sum_{i=0}^{n}\Big[\mu_i\min\left(d_i(t),\,k_i(t)\right)+$$

$$+\theta_i\left(k_i(t)-d_i(t)\right)u\left(k_i(t)-d_i(t)\right)+\beta_i\, d_i(t)+\gamma_i\left(m_i-d_i(t)\right)\Big]\Bigg\}\Delta t+o(\Delta t)\Bigg];$$

- из состояния $\left(d,k-I_0,t\right)$ с вероятностью

$$\left[\lambda_0^+\left(K-\sum_{i=0}^{n}k_i(t)+1\right)\Delta t+o(\Delta t)\right]\left[1-\left\{\lambda_0^-k_0(t)+\sum_{i=0}^{n}\Big[\mu_i\min\big(d_i(t),k_i(t)\big)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\theta_i\big(k_i(t)-d_i(t)\big)u\big(k_i(t)-d_i(t)\big)+\beta_i\,d_i(t)+\gamma_i\big(m_i-d_i(t)\big)\Big]\right\}\Delta t+o(\Delta t)\right];$$

- из состояния $(d,k+I_i-I_j,t)$ с вероятностью

$$\Big[\Big(\mu_i p_{ij}\min\big(d_i(t),k_i(t)+1\big)+\theta_i q_{ij}\big(k_i(t)-d_i(t)+1\big)u\big(k_i(t)-d_i(t)+1\big)\Big)\Delta t+o(\Delta t)\Big]\times$$

$$\times\left[1-\left\{\lambda_0^-k_0(t)+\lambda_0^+\left(K-\sum_{i=0}^{n}k_i(t)\right)+\sum_{\substack{r=1\\ r\neq i,j}}^{n}\Big[\mu_r\min\big(d_r(t),k_r(t)\big)+\right.\right.$$

$$+\theta_i\big(k_i(t)-d_i(t)\big)u\big(k_i(t)-d_i(t)\big)+\beta_r d_r(t)+\gamma_r\big(m_r-d_r(t)\big)\Big]+$$

$$+\mu_j\min\big(d_j(t),k_j(t)-1\big)+\theta_j\big(k_j(t)-d_j(t)-1\big)u\big(k_j(t)-d_j(t)-1\big)+$$

$$+\beta_j d_j(t)+\gamma_j\big(m_j-d_j(t)\big)+\theta_i\big(k_i(t)-d_i(t)+1\big)u\big(k_i(t)-d_i(t)+1\big)\sum_{\substack{r=1\\ r\neq j}}^{n}q_{ir}+$$

$$\left.\left.+\mu_i\min\big(d_i(t),k_i(t)+1\big)\sum_{\substack{r=1\\ r\neq i}}^{n}p_{ir}+\beta_i d_i(t)+\gamma_i\big(m_i-d_i(t)\big)\right\}\Delta t+o(\Delta t)\right],\ i,j=\overline{1,n};$$

- из остальных состояний – с вероятностью $o(\Delta t)$.

Используя формулу полной вероятности, и переходя к пределу при $\Delta t\to 0$, получим систему разностно-дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний

$$\frac{dP(d,k,t)}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Big[\mu_i p_{ij}\min\big(d_i(t),k_i(t)\big)+$$

$$+\theta_i q_{ij}\big(k_i(t)-d_i(t)\big)u\big(k_i(t)-d_i(t)\big)\Big]\Big[P\big(d,k+I_i-I_j,t\big)-P\big(d,k,t\big)\Big]+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mu_i p_{ij}\Big[\min\big(d_i(t),k_i(t)+1\big)-\min\big(d_i(t),k_i(t)\big)\Big]P\big(d,k+I_i-I_j,t\big)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\theta_i q_{ij}\Big[\big(k_i(t)-d_i(t)+1\big)u\big(k_i(t)-d_i(t)+1\big)-$$

$$-\big(k_i(t)-d_i(t)\big)u\big(k_i(t)-d_i(t)\big)\Big]P\big(d,k+I_i-I_j,t\big)+$$

$$+\lambda_0^+\left(K-\sum_{i=0}^{n}k_i(t)\right)\Big[P\big(d,k-I_0,t\big)-P\big(d,k,t\big)\Big]+\lambda_0^+P\big(d,k-I_0,t\big)+$$

$$+\lambda_0^- k_0(t)\left[P(d,k+I_0,t)-P(d,k,t)\right]+\lambda_0^- P(d,k+I_0,t)+$$

$$+\sum_{i=0}^{n}\gamma_i\left(m_i-d_i(t)\right)\left[P(d-I_i,k,t)-P(d,k,t)\right]+\sum_{i=0}^{n}\gamma_i P(d-I_i,k,t)+$$

$$+\sum_{i=0}^{n}\beta_i d_i(t)\left[P(d+I_i,k,t)-P(d,k,t)\right]+\sum_{i=0}^{n}\beta_i P(d+I_i,k,t). \quad (2)$$

Решение этой системы в аналитическом виде в общем случае затруднительно. В связи с этим рассмотрим важный случай большого числа заявок в сети, то есть $K>>1$. Для нахождения распределения вероятностей случайного вектора $z(t)$, перейдем к относительным переменным, рассматривая вектор $\xi(t)=\left(\frac{d_0(t)}{K},\frac{d_1(t)}{K},...,\frac{d_n(t)}{K},\frac{k_0(t)}{K},\frac{k_1(t)}{K},...,\frac{k_n(t)}{K}\right)$. В этом случае возможные значения этого вектора при фиксированном t принадлежат ограниченному замкнутому множеству

$$G=\left\{(y,x)=(y_0,y_1,...,y_n,x_0,x_1,...,x_n):\ x_i\ge 0,\ \sum_{i=0}^{n}x_i\le 1,\ 0\le y_i\le\frac{d_i}{K}\right\}, \quad (3)$$

в котором они располагаются в узлах $2(n+1)$-мерной решетки на расстоянии $\varepsilon=\frac{1}{K}$ друг от друга. При увеличении K «плотность заполнения» множества G возможными компонентами вектора $\xi(t)$ увеличивается, и становится возможным считать, что он имеет непрерывное распределение с плотностью вероятностей $p(y,x,t)$, причем $K^{2(n+1)}P(d,k,t)\xrightarrow[K\to\infty]{}p(y,x,t)$. Поэтому можно воспользоваться аппроксимацией функции $P(d,k,t)$, применив соотношение $K^{2(n+1)}P(d,k,t)=K^{2(n+1)}P(yK,xK,t)=p(y,x,t)$, $(y,x)\in G$.

Обозначим $e_i=\varepsilon I_i$, $i=\overline{1,n}$, $c(b)=\begin{cases}1, b>0\\ 0, b\le 0\end{cases}$. Отметим, что

$$\min(b,a+1)=\min(b,a)+c(b-a),\ c(b-a)=\frac{\partial\min(b,a)}{\partial a}, \quad (4)$$

т.к. $\min(b,a)=\begin{cases}a, b\ge a\\ b, b<a\end{cases}$. Используя относительные переменные $y_i=\frac{d_i}{K}$, $x_i=\frac{k_i}{K}$, $l_i=\frac{m_i}{K}$, $i=\overline{0,n}$, соотношение (4) и то, что при $K\to\infty$ $\varepsilon\to 0$, перепишем предыдущую систему уравнений для плотности $p(y,x,t)$:

$$\frac{\partial p(y,x,t)}{\partial t}=K\sum_{i=1,j=1}^{n}\left[\mu_i p_{ij}\min(y_i,x_i)+\theta_i q_{ij}(x_i-y_i\quad)\frac{\partial\min(y_i,x_i)}{\partial y_i}\right]\times$$

$$\times\left[p\left(y,x+e_i-e_j,t\right)-p\left(y,x,t\right)\right]+K\sum_{i=1,j=1}^{n}\left(\mu_i p_{ij}+\theta_i q_{ij}\left(x_i-y_i+1\right)\frac{\partial\min\left(y_i,x_i\right)}{\partial x_i}+\right.$$

$$\left.+\theta_i q_{ij}\left(x_i-y_i+1\right)-\theta_i q_{ij}\left(x_i-y_i\right)\frac{\partial\min\left(y_i,x_i\right)}{\partial y_i}\right)p\left(y,x+e_i-e_j,t\right)+$$

$$+K\lambda_0^+\left(1-\sum_{i=0}^{n}x_i\right)\left[p\left(y,x-e_0,t\right)-p\left(y,x,t\right)\right]+\lambda_0^+p\left(y,x-e_0,t\right)+$$

$$+K\lambda_0^-x_0\left[p\left(y,x+e_0,t\right)-p\left(y,x,t\right)\right]+\lambda_0^-p\left(y,x+e_0,t\right)+$$

$$+\sum_{i=0}^{n}K\gamma_i\left(l_i-y_i\right)\left[p\left(y-e_i,x,t\right)-p\left(y,x,t\right)\right]+\sum_{i=0}^{n}\gamma_i p\left(y-e_i,x,t\right)+$$

$$+\sum_{i=0}^{n}K\beta_i y_i\left[p\left(y+e_i,x,t\right)-p\left(y,x,t\right)\right]+\sum_{i=0}^{n}\beta_i p\left(y+e_i,x,t\right). \qquad (5)$$

Системы дифференциальных уравнений для среднего числа заявок и исправных линий обслуживания в системах

Представляя правую часть системы уравнений (5) с точностью до членов порядка малости ε^2 и то что $\varepsilon K=1$ получаем, что плотность $p\left(y,x,t\right)$ удовлетворяет с точностью до членов порядка малости ε^2 уравнению Колмогорова – Фоккера – Планка вида

$$\frac{\partial p\left(y,x,t\right)}{\partial t}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_i}\left(A_i^{(1)}\left(y\right)p\left(y,x,t\right)\right)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_i^{(2)}\left(y,x\right)p\left(y,x,t\right)\right)+$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial y_i\partial y_j}\left(B_{ij}^{(1)}\left(y\right)p\left(y,x,t\right)\right)+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\left(B_{ij}^{(2)}\left(y,x\right)p\left(y,x,t\right)\right), \qquad (6)$$

где

$$A_i^{(1)}\left(y\right)=\gamma_i\left(l_i-y_i\right)-\beta_i y_i, \qquad (7)$$

$$A_0^{(2)}\left(y,x\right)=\sum_{j=0}^{n}\left[\mu_j p_{j0}^*\min\left(y_j,x_j\right)+\theta_j q_{j0}^*\left(x_j-y_j\right)u\left(x_j-y_j\right)\right]+$$

$$+\lambda_0^+\left(1-\sum_{i=0}^{n}x_i\right)-\lambda_0^-x_0, \qquad (8)$$

$$A_i^{(2)}\left(y,x\right)=\sum_{j=0}^{n}\left[\mu_j p_{ji}^*\min\left(y_j,x_j\right)+\theta_j q_{ji}^*\left(x_j-y_j\right)u\left(x_j-y_j\right)\right],\ i=\overline{1,n}; \qquad (9)$$

$$p_{ji}^*=\begin{cases}p_{ji}, & j\ne i,\\ p_{ii}-1, & j=i;\end{cases}$$

$$B_{ii}^{(1)}\left(y\right)=\gamma_i\left(l_i-y_i\right)+\beta_i y_i; \qquad B_{ij}^{(1)}\left(y\right)=0,\ i\ne j;$$

$$B_{ii}^{(2)}\left(y,x\right)=\sum_{j=0}^{n}\left[\mu_j p_{ji}^{**}\min\left(y_j,x_j\right)+\theta_i q_{ji}^{**}\left(x_j-y_j\right)u\left(x_j-y_j\right)\right]-\lambda_0^{+}\left(1-\sum_{i=0}^{n}x_i\right)+\lambda_0^{-}x_0,$$

$$p_{ji}^{**}=\begin{cases}p_{ji},\ j\neq i,\\ 1-p_{ii},\ j=i;\end{cases}$$

$$B_{ij}^{(2)}\left(y,x\right)=-\mu_j p_{ji}\min\left(y_j,x_j\right)+\theta_i q_{ji}\left(x_j-y_j\right)u\left(x_j-y_j\right),\ i\neq j,\ i=\overline{0,n}.$$

Так как, плотность $p\left(y,x,t\right)$ удовлетворяет с точностью до членов порядка малости ε^2 уравнению Колмогорова – Фоккера – Планка и $A_i^{(1)}\left(y\right)$, $A_i^{(2)}\left(y,x\right)$ кусочно-линейны по y и x, то согласно [3], математические ожидания $w_i\left(t\right)=M\left\{d_i\left(t\right)/K\right\}$, $n_i\left(t\right)=M\left\{k_i\left(t\right)/K\right\}$, $i=\overline{0,n}$, с точностью до членов порядка малости $\mathrm{O}\left(\varepsilon^2\right)$ определяются из систем уравнений

$$\frac{dw_i\left(t\right)}{dt}=A_i^{(1)}\left(w\left(t\right)\right)=\gamma_i\left(l_i-w_i\left(t\right)\right)-\beta_i w_i\left(t\right),\ i=\overline{0,n}, \tag{10}$$

$$\frac{dn_0\left(t\right)}{dt}=A_0^{(2)}\left(w\left(t\right),n\left(t\right)\right)=\lambda_0^{+}\left(1-\sum_{i=0}^{n}n_i\left(t\right)\right)-\lambda_0^{-}n_0\left(t\right)+$$

$$+\sum_{j=0}^{n}\left[\mu_j p_{j0}^{*}\min\left(w_j\left(t\right),n_j\left(t\right)\right)+\theta_j q_{j0}^{*}\left(n_j\left(t\right)-w_j\left(t\right)\right)u\left(n_j\left(t\right)-w_j\left(t\right)\right)\right], \tag{11}$$

$$\frac{dn_i\left(t\right)}{dt}=A_i^{(2)}\left(w\left(t\right),n\left(t\right)\right)=$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\left[\mu_j p_{ji}^{*}\min\left(w_j\left(t\right),n_j\left(t\right)\right)+\theta_j q_{ji}^{*}\left(n_j\left(t\right)-w_j\left(t\right)\right)u\left(n_j\left(t\right)-w_j\left(t\right)\right)\right],\ i=\overline{1,n}. \tag{12}$$

Правые части системы (11), (12) являются непрерывными кусочно-линейными функциями. Такие системы решаются путем разбиения фазового пространства и нахождения решений в областях линейности их правых частей. Определим явную форму полученных уравнений (11), (12) в областях линейности их правых частей. Пусть $\Omega\left(t\right)=\left\{0,1,...,n\right\}$ – множество индексов компонент вектора $n\left(t\right)$. Разобьем $\Omega\left(t\right)$ на два непересекающихся множества $\Omega_0\left(t\right)$ и $\Omega_1\left(t\right)$:

$$\Omega_0\left(t\right)=\left\{i:w_i\left(t\right)<n_i\left(t\right)\leq 1\right\},\ \Omega_1\left(t\right)=\left\{j:0\leq n_j\left(t\right)\leq w_j\left(t\right)\right\}.$$

При фиксированном t число разбиений такого типа равно 2^{n+1}. Каждое разбиение будет задавать в множестве $G\left(t\right)=\left\{n\left(t\right):n_i\left(t\right)\geq 0,\ \sum_{i=0}^{n}n_i\left(t\right)\leq 1\right\}$ непересекающиеся области $G_\tau\left(t\right)$ такие, что

$$G_\tau(t)=\left\{n(t): w_i(t)<n_i(t)\le 1, i\in\Omega_0(t); 0\le n_j(t)\le w_j(t), j\in\Omega_1(t); \sum_{c=0}^{n} n_c(t)\le 1\right\},$$

$$\tau=1,2,\ldots,2^n,2^{n+1},\ \bigcup_{\tau=1}^{2^{n+1}} G_\tau(t)=G(t).$$

Теперь можно записать систему уравнений (11), (12) в явной форме для каждой из областей $G_\tau(t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dn_0(t)}{dt}=\sum_0\left[\mu_j p_{j0}^* w_j(t)+\theta_j q_{j0}^*\left(n_j(t)-w_j(t)\right)\right]+ \\ \qquad +\sum_1 \mu_j p_{j0}^* n_j(t)+\lambda_0^+\left(1-\sum_{i=0}^{n} n_i(t)\right)-\lambda_0^- n_0(t), \\ \dfrac{dn_i(t)}{dt}=\sum_0\left[\mu_j p_{ji}^* w_j(t)+\theta_j q_{ji}^*\left(n_j(t)-w_j(t)\right)\right]+\sum_1 \mu_j p_{ji}^* n_j(t),\quad i=\overline{1,n}, \end{cases} \tag{13}$$

где $\sum_0=\sum\limits_{j\in\Omega_0(t)}$, $\sum_1=\sum\limits_{j\in\Omega_1(t)}$. Решение системы уравнений (10), (13) позволяет определять среднее относительное число исправных линий и среднее относительное число заявок в каждой из систем сети.

Пример

Рассмотрим открытую сеть МО с ненадежными линиями и центральной СМО в случае $n=5$, $K=10\ 000$. Число линий обслуживания в центральной СМО S_0 – $m_0=15$, в периферийных – $m_1=6$, $m_2=8$, $m_3=5$, $m_4=12$. Интенсивность создания заявок в системе S_0 – $\lambda_0^+=0.5$, интенсивность уничтожения существующих $\lambda_0^-=0.09$. Интенсивности обслуживания заявок в линиях систем сети: $\mu_0=1.5$ $\mu_1=1.1$, $\mu_2=1.3$, $\mu_3=1$, $\mu_4=1.2$. Средние длительности исправной работы каждой линии СМО равны соответственно: $\beta_0^{-1}=0.5$, $\beta_1^{-1}=1.11$, $\beta_2^{-1}=1.25$, $\beta_3^{-1}=0.91$, $\beta_4^{-1}=1$. Среднее время ожидания заявки в очереди на обслуживание: $\theta_0^{-1}=0.5$, $\theta_1^{-1}=0.25$, $\theta_2^{-1}=0.2$, $\theta_3^{-1}=0.33$, $\theta_4^{-1}=0.22$. Средние длительности восстановления неисправных линий систем: $\gamma_0^{-1}=0.91$, $\gamma_2^{-1}=0.5$, $\gamma_2^{-1}=0.8$, $\gamma_3^{-1}=1.25$, $\gamma_4^{-1}=1$. Вероятности переходов заявок между СМО сети: $p_{01}=0.3$, $p_{02}=0.2$, $p_{03}=0.1$, $p_{04}=0.4$, $p_{10}=p_{20}=p_{30}=p_{40}=1$, в остальных случаях $p_{ij}=0$, $i,j=\overline{0,4}$. Вероятности перехода заявок не дождавшихся обслуживания: $q_{01}=q_{03}=0.25$, $q_{02}=0.4$, $q_{04}=0.1$, $q_{10}=q_{20}=q_{30}=q_{40}=1$, в остальных случаях $q_{ij}=0$, $i,j=\overline{0,4}$. Положим, что $n_0(0)=0.5$, $n_1(0)=n_2(0)=n_3(0)=n_4(0)=0$ и $w_i(0)=m_i$, $i=\overline{0,4}$. Предположим, что центральная СМО в среднем функционирует в условиях высокой загрузки, т.е. $\min\left(w_0(t),n_0(t)\right)=n_0(t)$, а в периферийных среднем не наблюдается очередей, т.е. $\min\left(w_i(t),n_i(t)\right)=n_i(t)$, $i=\overline{1,4}$.

Решение системы (13) можно найти, используя прямой метод (с помощью матричной экспоненты) или метод преобразований Лапласа [4]. Аналитические выражения для изменения среднего относительного числа заявок в системах сети, имеют вид:

$$n_0(t) = 0.0035e^{-3.1t} + 0.2586e^{-3.2402t} +$$
$$+0.0003e^{-1.2309t} + 0.0003e^{-1.1596t} + 0.0001e^{-1.0379t} - 0.1057e^{-0.5213t} + 0.3429,$$
$$n_1(t) = -0.0008\mathrm{e}^{-3.1t} - 0.0604\mathrm{e}^{-3.2402t} -$$
$$-0.0012\mathrm{e}^{-1.2309t} - 0.0027\mathrm{e}^{-1.1596t} + 0.0005\mathrm{e}^{-1.0379t} - 0.0913\mathrm{e}^{-0.5213t} + 0.1559,$$
$$n_2(t) = -0.0013e^{-3.1t} - 0.1066e^{-3.2402t} +$$
$$+0.0035e^{-1.2309t} + 0.0018e^{-1.1596t} + 0.0002e^{-1.0379t} - 0.1085e^{-0.5213t} + 0.2108,$$
$$n_3(t) = -0.0007e^{-3.1t} - 0.0577e^{-3.2402t} -$$
$$-0.0007e^{-1.2309t} - 0.001e^{-1.1596t} - 0.0009e^{-1.0379t} - 0.1104e^{-0.5213t} + 0.1713,$$
$$n_4(t) = -0.0006e^{-3.1t} - 0.0253e^{-3.2402t} -$$
$$-0.002e^{-1.2309t} + 0.0016e^{-1.1596t} + 0.0001e^{-1.0379t} - 0.0311e^{-0.5213t} + 0.0573.$$

Умножив эти выражения на K, получим соотношения для среднего числа заявок в СМО $N_i(t) = Kn_i(t)$, $i = \overline{0,4}$, графики изменения которых представлены на рис.1.

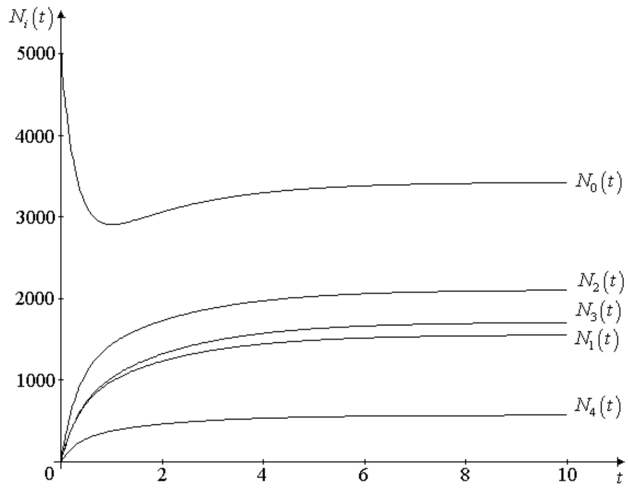

Рис.1. Изменение среднего числа заявок в системах сети

Решая систему (10) получим выражения для среднего относительного числа исправных линий в системах сети:

$$w_0(t) = 0.0005 + 0.001e^{-3.1t}, \quad w_1(t) = 0.0004 + 0.0002e^{-2.9t},$$
$$w_2(t) = 0.0005 + 0.0003e^{-2.05t}, \quad w_3(t) = 0.0002 + 0.0003e^{-1.9t},$$
$$w_4(t) = 0.0006 + 0.0006e^{-2t},$$

откуда можно найти $d_i(t) = Kw_i(t)$, $i = \overline{0,4}$. Графики изменения числа исправных линий обслуживания представлены на рис.2.

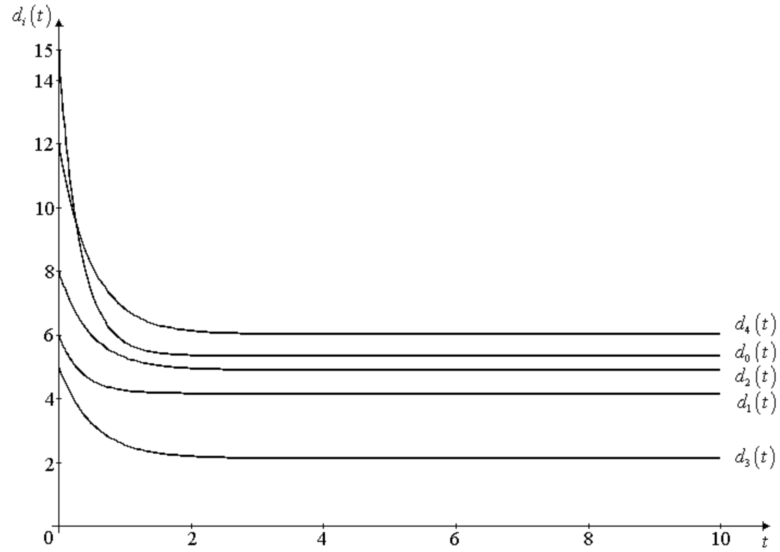

Рис.2. Изменение среднего числа исправных линий обслуживания

Заключение

Рассмотренный метод диффузионной аппроксимации является асимптотическим и справедлив только при большой загрузке сети МО заявками. Точность метода возрастает с увеличением числа заявок в сети и позволяет достаточно точно определять среднее число заявок и среднее число исправных линий обслуживания в системах сети в переходном режиме.

Список литературы

1. Статкевич, С.Э. Асимптотический анализ марковской сети с ненадежными системами обслуживания / С.Э. Статкевич, Т.В. Русилко // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і упраўленне. – 2011. – № 1. – С. 87–95.
2. Монько, В.Д. Асимптотический анализ экспоненциальной сети с ограниченным временем ожидания заявок и ненадежными системами обслуживания / В.Д. Монько, Д.Я. Копать, С.Э. Статкевич // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і упраўленне. – 2015. – № 1. – С. 138–147.
3. *Параев, Ю.И.* Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. – М.: Советское радио, 1976. – 185 с.
4. Маталыцкий, М.А. Стохастические сети с ограниченным временем ожидания заявок и ненадежным обслуживанием: моногр./ М.А. Маталыцкий, С.Э. Статкевич. – Гродно: ГрГУ, 2014. – 248 с.

Статкевич Святослав Эдуардович, доцент кафедры стохастического анализа и эконометрического моделирования факультета математики и информатики Гродненского государственного университета имени Янки Купалы, кандидат физико-математических наук, доцент, sstat@grsu.by