УДК 004.9:519.872

# АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОТКРЫТОЙ СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОГРАНИЧЕННЫМ ЧИСЛОМ ОДНОТИПНЫХ ЗАЯВОК

*Т.В. Русилко, В.Г. Алейникова*

*Объект исследования данной работы – открытая сеть массового обслуживания с однотипными заявками, общее число которых ограничено. Вектор, определяющий состояние рассматриваемой сети в произвольный момент времени, образует марковский случайный процесс. Целью исследования является асимптотический анализ марковского процесса, описывающего состояние сети массового обслуживания, при большом числе заявок и нахождение среднего относительного числа заявок в системах сети в произвольный момент времени.*

**Введение**

Данная работа посвящена асимптотическому анализу открытой сети массового обслуживания. Сеть массового обслуживания исследуется в условиях большой загрузки однотипными заявками. Использована методика диффузионной аппроксимации, описанная в работах [1, 2].

Исследуем $n$-узловую открытую сеть массового обслуживания с однотипными заявками, общее число которых изменяется с течением времени. Пусть $S_i$, $i=\overline{1,n}$, – системы массового обслуживания, между которыми циркулируют заявки, $S_0$ – внешняя среда. Матрица вероятностей переходов $P=\|p_{ij}\|$, $i,j=\overline{0,n}$, является стохастической матрицей, соответствующей неприводимой марковской цепи, $0 \le p_{ij} \le 1$, $\sum_{j=0}^{n} p_{ij}=1$. Предположим, что система $S_i$ имеет $m_i$ линий обслуживания, каждая из которых обслуживает заявки по показательному закону с интенсивностью $\mu_i$, $i=\overline{1,n}$. Кроме того, будем считать, что только система $S_1$ имеет связь с внешней средой: в систему $S_1$ поступает простейший поток заявок с интенсивностью $\lambda$, заявка, завершающая обслуживание в системе $S_1$, мгновенно независимо от других заявок с вероятностью $p_{1j}$, $j=\overline{1,n}$, переходит в систему $S_j$ или с вероятностью $p_{10}$ покидает сеть, $\sum_{j=0}^{n} p_{1j}=1$. Таким образом, интенсивность потока заявок, выходящего из системы $S_1$ во внешнюю среду, равна $\mu_1 p_{10}$. Будем считать, что общее число заявок в рассматриваемой открытой сети ограничено константой $K$. Состояние сети определяется вектором

$$k(t)=(k_1(t),k_2(t),...,k_n(t)), \qquad (1)$$

где $k_i(t)$ – число заявок в системе $S_i$ в момент времени $t$, $i=\overline{1,n}$. Вектор (1) в силу выше описанного является марковским случайным процессом с непрерывным временем и конечным числом состояний. Очевидно, что общее число обслуживаемых в сети заявок в момент времени $t$ составляет $K(t)=\sum_{i=1}^{n}k_i(t)$, число заявок во внешней среде – $k_0(t)=K-\sum_{i=1}^{n}k_i(t)$. Проведем асимптотический анализ марковского процесса (1) при большом числе заявок. Предположим, что сеть функционирует в условии большой загрузки заявками, то есть значение $K(t)$ достаточно велико, но ограничено: $0<<K(t)\le K$.

**Вывод системы дифференциальных уравнений для среднего относительного числа заявок в системах сети массового обслуживания**

Введем в рассмотрение $I_i$ – $n$-вектор, все компоненты которого равны нулю, за исключением $i$-ой, которая равна 1, $i=\overline{1,n}$. Рассмотрим все возможные переходы в состояние $k(t+\Delta t)=(k,t+\Delta t)$ процесса $k(t)$ за время $\Delta t$:

- из состояния $(k+I_i-I_j,t)$ можно попасть в $(k,t+\Delta t)$ с вероятностью

$$\mu_i\min(m_i,k_i(t)+1)p_{ij}\Delta t+o(\Delta t),\ i,j=\overline{1,n};$$

- из состояния $(k+I_1,t)$ можно попасть в $(k,t+\Delta t)$ с вероятностью

$$\mu_1 p_{10}\min(m_1,k_1(t)+1)\Delta t+o(\Delta t);$$

- из состояния $(k-I_1,t)$ можно попасть в $(k,t+\Delta t)$ с вероятностью

$$\lambda\left(K-\sum_{i=1}^{n}k_i(t)+1\right)\Delta t+o(\Delta t);$$

- из состояния $(k,t)$ – с вероятностью

$$1-\left[\sum_{i=1}^{n}\mu_i\min(m_i,k_i(t))+\mu_1p_{10}\min(m_1,k_1(t))+\lambda\left(K-\sum_{i=1}^{n}k_i(t)\right)\right]\Delta t+o(\Delta t);$$

- из остальных состояний – с вероятностью $o(\Delta t)$.

Формула полной вероятности позволяет записать систему разностных уравнений для вероятностей состояний $P(k,t)$:

$$\begin{aligned}P(k,t+\Delta t)=&\sum_{i,j=1}^{n}P(k+I_i-I_j,t)\mu_i\min(m_i,k_i(t)+1)p_{ij}\Delta t+\\&+P(k+I_1,t)\mu_1p_{10}\min(m_1,k_1(t)+1)\Delta t+\\&+P(k-I_1,t)\lambda\left(K-\sum_{i=1}^{n}k_i(t)+1\right)\Delta t+P(k,t)\times\\&\times\left(1-\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mu_ip_{ij}\min(m_i,k_i(t))+\mu_1p_{10}\min(m_1,k_1(t))+\lambda\left(K-\sum_{i=1}^{n}k_i(t)\right)\right]\Delta t\right)+o(\Delta t).\end{aligned}$$

Система разностно-дифференциальных уравнений Колмогорова для этих вероятностей имеет вид:

$$\frac{dP(k,t)}{dt} = \sum_{i,j=1}^{n} \mu_i \min(m_i, k_i(t)) p_{ij} (P(k + I_i - I_j, t) - P(k,t)) +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{n} (\mu_i \min(m_i, k_i(t)+1) - \mu_i \min(m_i, k_i(t)) p_{ij} P(k + I_i - I_j, t) +$$
$$+ \mu_1 p_{10} \min(m_1, k_1(t))(P(k + I_1, t) - P(k,t)) +$$
$$+ (\mu_1 p_{10} \min(m_1, k_1(t)+1) - \mu_1 p_{10} \min(m_1, k_1(t))) P(k + I_1, t) + \tag{2}$$
$$+ \lambda \left( K - \sum_{i=1}^{n} k_i(t) \right) (P(k - I_1, t) - P(k,t)) + \lambda P(k - I_1, t).$$

Решение системы (2) в аналитическом виде является трудной задачей. Поэтому далее будем рассматривать асимптотический случай большого числа заявок в сети массового обслуживания, то есть положим, что $K >> 1$. Чтобы найти распределение вероятностей случайного вектора $k(t)$, перейдем к относительным переменным и будем исследовать вектор $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), ..., \xi_n(t)) = \left( \frac{k(t)}{K} \right) = \left( \frac{k_1(t)}{K}, \frac{k_2(t)}{K}, ..., \frac{k_n(t)}{K} \right)$. Возможные значения этого вектора при фиксированном $t$ принадлежат ограниченному замкнутому множеству

$$G = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \geq 0, i = \overline{1,n}, \sum_{i=1}^{n} x_i \leq 1 \right\}, \tag{3}$$

в котором они располагаются в узлах $n$-мерной решетки на расстоянии $\varepsilon = \frac{1}{K}$ друг от друга. При увеличении $K$ «плотность заполнения» множества $G$ возможными компонентами вектора $\xi(t)$ увеличивается, и становится возможным считать, что он имеет непрерывное распределение с плотностью распределения вероятностей $p(x,t)$, которая удовлетворяет асимптотическому соотношению $K^n P(k,t) \xrightarrow[K \to \infty]{} p(x,t)$. Воспользуемся следующей аппроксимацией функции $P(k,t)$: $K^n P(k,t) = K^n P(xK,t) = p(x,t)$, $x \in G$.

Переписывая систему уравнений (2) для плотности $p(x, t)$, получим

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = K \sum_{i,j=1}^{n} \mu_i \min(l_i, x_i) p_{ij} (p(x + e_i - e_j, t) - p(x,t)) +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{n} \mu_i \frac{\partial \min(l_i, x_i)}{\partial x_i} p_{ij} p(x + e_i - e_j, t) +$$
$$+ K \mu_1 p_{10} \min(l_1, x_1)(p(x + e_1, t) - p(x,t)) +$$
$$+ \mu_1 p_{10} \frac{\partial \min(m_1, x_1)}{\partial x_1} p(x + e_1, t) +$$
$$+ K\lambda \left( 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i \right) (p(x - e_1, t) - p(x,t)) + \lambda p(x - e_1, t),$$

где $l_i = \dfrac{m_i}{K}$, $i = \overline{1,n}$. Если $p(x, t)$ дважды непрерывно дифференцируема по $x$, то справедливы следующие разложения:

$$p(x \pm e_i, t) = p(x, t) \pm \varepsilon \frac{\partial p(x, t)}{\partial x_i} + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x_i^2} + o(\varepsilon^2),$$

$$p(x + e_i - e_j, t) = p(x, t) + \varepsilon \left( \frac{\partial p(x, t)}{\partial x_i} - \frac{\partial p(x, t)}{\partial x_j} \right) +$$

$$+ \frac{\varepsilon^2}{2} \left( \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x_i^2} - 2 \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x_j^2} \right) + o(\varepsilon^2),\ i, j = \overline{0,n}.$$

Используя их и то, что $\varepsilon K = 1$, с точностью до членов порядка малости $\varepsilon^2$ получим следующее представление:

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} \mu_i \min(l_i, x_i) p_{ij} \left[ \left( \frac{\partial p(x, t)}{\partial x_i} - \frac{\partial p(x, t)}{\partial x_j} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x_i^2} - 2 \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x_j^2} \right) \right] +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} \mu_i \frac{\partial \min(l_i, x_i)}{\partial x_i} p_{ij} \left[ p(x, t) + \varepsilon \left( \frac{\partial p(x, t)}{\partial x_i} - \frac{\partial p(x, t)}{\partial x_j} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\varepsilon^2}{2} \left( \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x_i^2} - 2 \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x_j^2} \right) \right] +$$

$$+ \mu_1 p_{10} \min(l_1, x_1) \left[ \frac{\partial p(x, t)}{\partial x_1} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x_1^2} \right] +$$

$$+ \mu_1 p_{10} \frac{\partial \min(l_1, x_1)}{\partial x_1} \left[ p(x, t) + \varepsilon \frac{\partial p(x, t)}{\partial x_1} + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x_1^2} \right] +$$

$$+ \lambda \left( 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i \right) \left[ - \frac{\partial p(x, t)}{\partial x_1} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x_1^2} \right] +$$

$$+ \lambda \left[ p(x,t) - \varepsilon \frac{\partial p(x,t)}{\partial x_1} + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial p(x,t)}{\partial x_1^2} \right] + o(\varepsilon^2).$$

Последнее уравнение с точностью до членов порядка малости $O(\varepsilon^2)$ можно записать в виде

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \big( A_i(x) p(x, t) \big) + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \big( B_{ij}(x) p(x, t) \big), \qquad (4)$$

где

$$A_1(x) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \min(l_j, x_j) p_{j1}^* + \lambda\left(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i\right), \tag{5}$$

$$A_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \min(l_j, x_j) p_{ji}^*,\ i = \overline{2,n}, \tag{6}$$

$$B_{11}(x) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \min(l_j, x_j) p_{ji}^{**} - \lambda\left(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i\right),$$

$$B_{ii}(x) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \min(l_j, x_j) p_{ij}^{**},\ i = \overline{2,n},$$

$$B_{ij}(x) = -\mu_i \min(l_i, x_i) p_{ij},\ i \neq j,$$

$$p_{ji}^* = \begin{cases} p_{ji},\ i \neq j, \\ p_{ji} - 1,\ i = j; \end{cases} \qquad p_{ij}^{**} = \begin{cases} p_{ij},\ i \neq j, \\ p_{ij} + 1,\ i = j. \end{cases}$$

Таким образом показано, что плотность $p(x,t)$ случайного вектора $\xi(t)$ принадлежит множеству решений уравнения Колмогорова – Фоккера – Планка (4). Тогда согласно [3] математические ожидания $n_i(t) = M\left(\xi_i(t)\right)$, $i = \overline{1,n}$, с точностью до членов порядка малости $O(\varepsilon^2)$ определяются из системы уравнений

$$\frac{dn_i(t)}{dt} = A_i(n(t)),\ i = \overline{1,n}. \tag{7}$$

Из (5), (6) очевидно, что правые части (7) являются непрерывными кусочно-линейными функциями. Такие системы целесообразно решать путем разбиения фазового пространства и нахождения решений в областях линейности их правых частей. Пусть $\Omega(t) = \{1, 2, ..., n\}$ – множество индексов компонент вектора $n(t)$. Разобьем $\Omega(t)$ на два непересекающихся множества $\Omega_0(t)$ и $\Omega_1(t)$: $\Omega_0(t) = \{i : l_i < n_i(t) \le 1\}$, $\Omega_1(t) = \{j : 0 \le n_j(t) \le l_j\}$. При фиксированном $t$ число разбиений такого типа равно $2^n$. Каждое разбиение будет задавать в множестве $G(t) = \left\{n(t) : n_i(t) \ge 0,\ \sum_{i=1}^{n} n_i(t) \le 1\right\}$ непересекающиеся области $G_\tau(t)$ такие, что

$$G_\tau(t) = \left\{n(t) : l_i < n_i(t) \le 1,\ i \in \Omega_0(t);\ 0 \le n_j(t) \le l_j,\ j \in \Omega_1(t);\ \sum_{c=1}^{n} n_c(t) \le 1\right\},$$

$$\tau = 1, 2, ..., 2^n,\ \bigcup_{\tau=1}^{2^n} G_\tau(t) = G(t).$$

Теперь можно записать систему уравнений (7) в явной форме для каждой из областей разбиения фазового пространства. Рассмотрим область $A:\ \Omega_0(t) = \varnothing, \Omega_1(t) = \{1,2,...,n\}$, которая соответствует отсутствию в среднем очереди в системах $S_1, S_2, ..., S_n$. Система дифференциальных уравнений (7) в этой области имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dn_1(t)}{dt} = \sum\limits_{j=2}^{n} \mu_j n_j(t) p_{j1} - \mu_1 n_1(t) + \lambda\left(1 - \sum\limits_{i=1}^{n} n_i(t)\right), \\ \dfrac{dn_i(t)}{dt} = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \mu_j n_j(t) p_{ji} - \mu_i n_i(t),\ i = \overline{2, n}. \end{cases} \qquad (8)$$

Система (8) – система обыкновенных линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Аналитическое решение систем такого вида представимы в виде взвешенных сумм экспонент. Решение системы (8) при больших $n$ в аналитическом виде затруднительно, поэтому в случае сети большой размерности целесообразно использовать численные методы.

**Пример**

Рассмотрим сеть МО, состоящую из трех СМО $S_1, S_2, S_3$, число заявок в которой ограниченно константой $K = 40000$. Зададим следующие параметры функционирования:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0.9 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0.7 & 0.3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda = 0.1,\ m_1 = 20,\ m_2 = 3,\ m_3 = 8,$$

$$\mu_1 = 0.5,\ \mu_2 = 0.3,\ \mu_3 = 0.8.$$

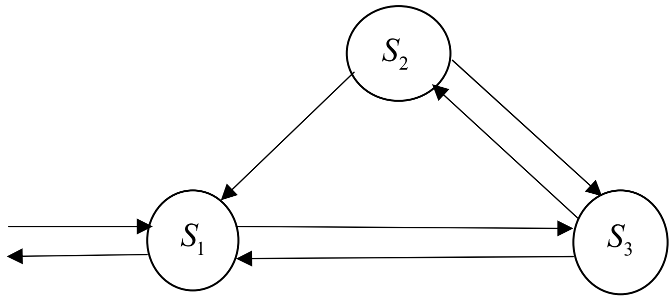


Рис.1. Граф сети

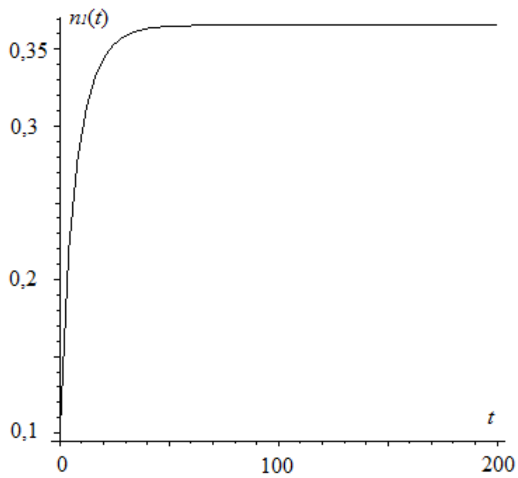


Рис.2. График $n_1(t)$

Граф сети имеет вид, представленный на рис. 1. Определим среднее относительное число заявок в каждой из систем сети. Эти числа рассчитываются относительно величины $K$ – числа потенциально возможных заявок в сети массового обслуживания.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (8) при $n = 3$ и начальном условии $n_1(t) = 0.1$, $n_i(t) = 0$, $i = 2,3$. На рис. 2 представлено в графическом виде поведение $n_1(t)$ в зависимости от времени.

Аналогично можно определить остальные компоненты вектора $n(t)$, являющиеся решением (8). Анализ результатов позволил установить, что в сети устанавливается стационарное распределение заявок по системам. Например, $n_1 = \lim_{t \to \infty} n_1(t) = 0.365$.

## Заключение

Приведенный метод расчета среднего относительного числа заявок в системах массового обслуживания является асимптотическим и справедлив только при большой загрузке сети массового обслуживания заявками. Точность метода возрастает с увеличением общего числа обслуживаемых заявок.

Рассмотренная сеть может быть использована в качестве математической модели различных экономических, а также компьютерных и других технических систем, связанных с обработкой заявок клиентов [4].

## Список литературы

1. Медведев, Г.А. Об оптимизации замкнутой системы массового обслуживания / Г.А. Медведев // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1975. – № 6. – С. 65–73.
2. Медведев, Г.А. Замкнутые системы массового обслуживания и их оптимизация / Г.А. Медведев // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1978. – №6. – С. 199–203.
3. Параев, Ю.И. Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации / Ю.И. Параев. – М.: Советское радио, 1976. – 185 с.
4. Маталыцкий, М.А. Математический анализ стохастических моделей обработки исков в страховых компаниях / М.А. Маталыцкий, Т.В. Русилко. – Гродно: ГрГУ, 2007. – 335 с.

*Русилко Татьяна Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры стохастического анализа и эконометрического моделирования ГрГУ им. Я. Купалы, rusilko@grsu.by.*

*Алейникова Валерия Геннадьевна, студентка 3 курса специальности “Экономическая кибернетика” кафедры стохастического анализа и эконометрического моделирования ГрГУ им. Я. Купалы, aleinikova_lera@mail.ru.*