

К ВОПРОСУ РЕАЛИЗАЦИИ АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ СЛАУ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ LU-РАЗЛОЖЕНИЯ МАТРИЦЫ ПЕРЕМЕННОГО РАЗМЕРА В ПАКЕТЕ MS EXCEL

В.К.Пчельник

В представленном материале описывается способ решения линейных алгебраических уравнений размерности $2 \leq n \leq 10$ с использованием LU-разложения в электронных таблицах MS EXCEL. Материал может быть полезен преподавателю в курсе «Вычислительные методы алгебры» при проверке студенческих работ.

Введение

В курсе «Вычислительные методы алгебры» изучается алгоритм решения систем линейных алгебраических уравнений с использованием LU-разложения квадратной матрицы $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ на $L = (l_{ij})_{i,j=1}^n$ и $U = (u_{ij})_{i,j=1}^n$ – соответственно нижнюю (левую) и верхнюю (правую) треугольные матрицы. Для изучения и реализации алгоритма на практических занятиях удобно, на наш взгляд, использовать электронные таблицы MS EXCEL.

Теория метода

Имеет место следующая теорема [1].

Теорема. Если все главные миноры квадратной матрицы A отличны от нуля, то существуют такие нижняя L и верхняя U треугольные матрицы, что $A = LU$, где

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{32} & \dots & u_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Рис. 1. Вид матриц L и U в представлении $A = LU$

Найти матрицы L и U можно следующим образом:

$$\begin{aligned} u_{1j} &= a_{1j}, j = \overline{1, n}; \\ u_{ij} &= a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}, j = \overline{i, n}; \quad i = \overline{2, n}; \\ l_{j1} &= \frac{a_{j1}}{u_{11}}, j = \overline{2, n} \quad (u_{11} \neq 0); \\ l_{ji} &= \frac{1}{u_{ii}} \left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} u_{ki} \right), j = \overline{i+1, n}; (u_{ii} \neq 0). \end{aligned}$$

Затем следует решить поочередно два матричных уравнения: $LY = B$ и $UX = Y$.

Реализация алгоритма в электронных таблицах MS EXCEL

Приведем один из вариантов реализации решения СЛАУ, используя LU -разложение. Матрица A исходной системы $AX=B$ расположена в диапазоне C3:L12, столбец свободных членов B – в диапазоне M3:M12 (рис. 2). Порядок матрицы находится в ячейке A2.

	A	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
2	7	1	2	3	4	5	6	7				11
3	1	15,000000	-5,000000	1,000000	-3,000000	4,000000	3,000000	-1,000000				-10,000000
4	2	2,000000	16,000000	4,000000	1,000000	3,000000	-5,000000	2,000000				-6,000000
5	3	-1,000000	4,000000	11,000000	-3,000000	-1,000000	-2,000000	1,000000				2,000000
6	4	-3,000000	-4,000000	3,000000	17,000000	-4,000000	-2,000000	-4,000000				15,000000
7	5	-2,000000	0,000000	-5,000000	-2,000000	17,000000	-5,000000	-2,000000				-13,000000
8	6	-2,000000	-4,000000	1,000000	3,000000	-2,000000	19,000000	4,000000				-18,000000
9	7	-1,000000	1,000000	3,000000	4,000000	-4,000000	2,000000	12,000000				2,000000
10												
11												
12												

Рис.2. Исходные данные системы $AX=B$

В ячейки C2 и A3 помещены 1. Нумерация столбцов осуществляется формулой (1). Для нумерации строк используется аналогичная формула. В ячейках P3 и Q3 фиксируем диагональный элемент матрицы A (формула 2) и число 1 (рис. 3).

$$=ЕСЛИ(ЕОШИБКА(C2+1);"";ЕСЛИ(C2+1<= A2;C2+1;"")) \quad (1)$$

$$=ЕСЛИ(ЕОШИБКА(СМЕЩ(С3;Q3-1;Q3-1;1;1));"";СМЕЩ(С3;Q3-1;Q3-1;1;1)) \quad (2)$$

Первый столбец матрицы L формируем в диапазоне V3:V12 в соответствии с формулой (3). Формула вводится в ячейку V3 и распространяется на диапазон V4:V12.

P3		=ЕСЛИ(ЕОШИБКА(СМЕЩ(С3;Q3-1;Q3-1;1;1));"";СМЕЩ(С3;Q3-1;Q3-1;1;1))													
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	P	Q
2	7		1	2	3	4	5	6	7				11		
3	1	1	15,000000	-5,000000	1,000000	-3,000000	4,000000	3,000000	-1,000000				-10,000000	15	1
4	2	0,133333	2,000000	16,000000	4,000000	1,000000	3,000000	-5,000000	2,000000				-6,000000		
5	3	-0,066667	-1,000000	4,000000	11,000000	-3,000000	-1,000000	-2,000000	1,000000				2,000000		
6	4	-0,2	-3,000000	-4,000000	3,000000	17,000000	-4,000000	-2,000000	-4,000000				15,000000		
7	5	-0,133333	-2,000000	0,000000	-5,000000	-2,000000	17,000000	-5,000000	-2,000000				-13,000000		
8	6	-0,133333	-2,000000	-4,000000	1,000000	3,000000	-2,000000	19,000000	4,000000				-18,000000		
9	7	-0,066667	-1,000000	1,000000	3,000000	4,000000	-4,000000	2,000000	12,000000				2,000000		
10															
11															
12															

Рис.3. Формирование первого столбца матрицы L

$$=ЕСЛИ(A3<>"";ЕСЛИ(A3>= Q3;СМЕЩ(С3;0;Q3-1;1;1)/P3;0);"" \quad (3)$$

В ячейку Q14 помещаем формулу (5) (рис. 4). Элемент u_{11} матрицы U , расположенный в ячейке C14, вычисляется по формуле (5). Затем эта формула распространяется на диапазон C14:M23. Из ячейки P3 формула копируется в ячейку P14.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	P	Q
2	7		1	2	3	4	5	6	7				11		
3	1	1	15,000000	-5,000000	1,000000	-3,000000	4,000000	3,000000	-1,000000				-10,000000	15	1
4	2	0,133333	2,000000	16,000000	4,000000	1,000000	3,000000	-5,000000	2,000000				-6,000000		
5	3	-0,066667	-1,000000	4,000000	11,000000	-3,000000	-1,000000	-2,000000	1,000000				2,000000		
6	4	-0,2	-3,000000	-4,000000	3,000000	17,000000	-4,000000	-2,000000	-4,000000				15,000000		
7	5	-0,133333	-2,000000	0,000000	-5,000000	-2,000000	17,000000	-5,000000	-2,000000				-13,000000		
8	6	-0,133333	-2,000000	-4,000000	1,000000	3,000000	-2,000000	19,000000	4,000000				-18,000000		
9	7	-0,066667	-1,000000	1,000000	3,000000	4,000000	-4,000000	2,000000	12,000000				2,000000		
10															
11															
12															
13	7		1	2	3	4	5	6	7				11		
14	1	0	-1;1;1;""	-5,000000	1,000000	-3,000000	4,000000	3,000000	-1,000000				-10,000000	16,66666667	2
15	2	1	0,000000	16,666667	3,866667	1,400000	2,466667	-5,400000	2,133333				-4,666667		
16	3	0,22	0,000000	3,666667	11,066667	-3,200000	-0,733333	-1,800000	0,933333				1,333333		
17	4	-0,3	0,000000	-5,000000	3,200000	16,400000	-3,200000	-1,400000	-4,200000				13,000000		
18	5	-0,04	0,000000	-0,666667	-4,866667	-2,400000	17,533333	-4,600000	-2,133333				-14,333333		
19	6	-0,28	0,000000	-4,666667	1,133333	2,600000	-1,466667	19,400000	3,866667				-19,333333		
20	7	0,04	0,000000	0,666667	3,066667	3,800000	-3,733333	2,200000	11,933333				1,333333		
21															
22															
23															

Рис. 4. Формирование первого и второго столбцов матрицы U

$$=ЕСЛИ(ЕОШИБКА(Q3+1);"";ЕСЛИ(Q3<A2;Q3+1;"")) \quad (4)$$

$$=ЕСЛИ(И(\$A14<>"";C\$13<>"";\$Q\$14<>"");ЕСЛИ(\$A3<=\$Q\$3;C3;-СМЕЩ(\$C\$3;\$Q\$3-1;C\$13-1;1;1)/\$P\$3*СМЕЩ(\$C\$3;\$A3-1;\$Q\$3-1;1;1)+СМЕЩ(\$C\$3;\$A3-1;C\$13-1;1;1));"")) \quad (5)$$

Формулы диапазона В3:В12 копируются в диапазон В14:В23. Удаляем знаки «\$» из диапазона С13:Q23, копируем его и вставляем в ячейки А24, А35,..., А101 (рис. 5-6).

В диапазоне С112:Л122 формируем U. Для этого в ячейку С112 вводим формулу (6) и распространяем ее на весь диапазон С112:Л122 (рис. 7).

$$=ЕСЛИ(\$A113<>"";ГПР(С\$112;\$B\$2:\$M\$111;11*(\$A\$2-1)+\$A113+1);"")) \quad (6)$$

$$=ЕСЛИ(ИЛИ(\$A125="" ;C\$123="");"" ;СМЕЩ(\$B\$2;11*(C\$123-1)+\$A125;0;1;1)) \quad (7)$$

$$=ЕСЛИ(А124<>"" ;M3;"")) \quad (8)$$

Матрицу L формируем в диапазоне С124:Л133. Для этого в ячейку С123 вводим формулу (7) и распространяем ее на весь диапазон С124:Л133. Свободный член В системы $LY = B$ получаем по формуле (8) (рис. 8).

24	7		1	2	3	4	5	6	7				11		
25	1	0	15,000000	-5,000000	1,000000	-3,000000	4,000000	3,000000	-1,000000				5,000000	10,216	3
28	2	0	0,000000	16,666667	3,866667	1,400000	2,466667	-5,400000	2,133333				3,333333		
27	3	1	0,000000	0,000000	10,216000	-3,508000	-1,276000	-0,612000	0,464000				5,600000		
28	4	0,426781519	0,000000	0,000000	4,360000	16,820000	-2,460000	-3,020000	-3,560000				9,000000		
29	5	-0,46123727	0,000000	0,000000	-4,712000	-2,344000	17,632000	-4,816000	-2,048000				8,800000		
30	6	0,216914644	0,000000	0,000000	2,216000	2,992000	-0,776000	17,888000	4,464000				11,600000		
31	7	0,28504307	0,000000	0,000000	2,912000	3,744000	-3,832000	2,416000	11,848000				10,200000		
32															
33															
34															

Рис. 5. Копирование итераций алгоритма_1

36	1	0	15,00000	-5,00000	1,00000	-3,00000	4,00000	3,00000	-1,00000	5,00000	18,31714957	4
37	2	0	0,00000	16,66667	3,86667	1,40000	2,46667	-5,40000	2,13333	3,33333		
38	3	0	0,00000	0,00000	10,21600	-3,50800	-1,27600	-0,61200	0,46400	5,60000		
39	4	1	0,00000	0,00000	0,00000	18,31715	-1,91542	-2,75881	-3,75802	6,61002		
40	5	-0,21630114	0,00000	0,00000	0,00000	-3,96202	17,04346	-5,09827	-1,83398	11,38292		
41	6	0,204886495	0,00000	0,00000	0,00000	3,75293	-0,49921	18,02075	4,36352	10,38527		
42	7	0,2589885	0,00000	0,00000	0,00000	4,74393	-3,46828	2,59044	11,71574	8,60375		
43												
44												
45												
46												
47	1	0	15,00000	-5,00000	1,00000	-3,00000	4,00000	3,00000	-1,00000	5,00000	16,62915224	5
48	2	0	0,00000	16,66667	3,86667	1,40000	2,46667	-5,40000	2,13333	3,33333		
49	3	0	0,00000	0,00000	10,21600	-3,50800	-1,27600	-0,61200	0,46400	5,60000		
50	4	0	0,00000	0,00000	0,00000	18,31715	-1,91542	-2,75881	-3,75802	6,61002		
51	5	1	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	16,62915	-5,69501	-2,64685	12,81268		
52	6	-0,00642076	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	-0,10677	18,58595	5,13332	9,03097		
53	7	-0,178735	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	-2,97221	3,30494	12,68902	6,89183		
54												
55												
56												
57	7		1	2	3	4	5	6	7	11		
58	1	0	15,00000	-5,00000	1,00000	-3,00000	4,00000	3,00000	-1,00000	5,00000	18,5494283	6
59	2	0	0,00000	16,66667	3,86667	1,40000	2,46667	-5,40000	2,13333	3,33333		
60	3	0	0,00000	0,00000	10,21600	-3,50800	-1,27600	-0,61200	0,46400	5,60000		
61	4	0	0,00000	0,00000	0,00000	18,31715	-1,91542	-2,75881	-3,75802	6,61002		
62	5	0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	16,62915	-5,69501	-2,64685	12,81268		
63	6	1	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	18,54942	5,11632	9,11324		
64	7	0,123294828	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	2,28704	12,21594	9,18194		
65												
66												
67												
68	7		1	2	3	4	5	6	7	11		
69	1	0	15,00000	-5,00000	1,00000	-3,00000	4,00000	3,00000	-1,00000	5,00000	11,58512422	7
70	2	0	0,00000	16,66667	3,86667	1,40000	2,46667	-5,40000	2,13333	3,33333		
71	3	0	0,00000	0,00000	10,21600	-3,50800	-1,27600	-0,61200	0,46400	5,60000		
72	4	0	0,00000	0,00000	0,00000	18,31715	-1,91542	-2,75881	-3,75802	6,61002		
73	5	0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	16,62915	-5,69501	-2,64685	12,81268		
74	6	0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	18,54942	5,11632	9,11324		
75	7	1	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	11,58512	8,05829		
76												
77												
78												
79												
80												
81												
82												
83												
84												
85												
86												
87												
88												
89												
90												
91												
92												
93												
94												
95												
96												
97												
98												
99												
100												
101												
102												
103												
104												
105												
106												
107												
108												
109												
110												
111												
112												

Рис. 6. Копирование итераций алгоритма_2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
113	1		15,00000	-5,00000	1,00000	-3,00000	4,00000	3,00000	-1,00000			
114	2		0,00000	16,66667	3,86667	1,40000	2,46667	-5,40000	2,13333			
115	3		0,00000	0,00000	10,21600	-3,50800	-1,27600	-0,61200	0,46400			
116	4		0,00000	0,00000	0,00000	18,31715	-1,91543	-2,75881	-3,75803			
117	5		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	16,62915	-5,69501	-2,64685			
118	6		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	18,54943	5,11633			
119	7		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	11,58512			
120												
121												
122												

Рис. 7. Получение матрицы U

СЧЁТЕСЛИ		=ЕСЛИ(A124<>"";M3;"")							J	K	L	M	P	Q	R
		ЕСЛИ(лог_выражение; [значение_если_истина]; [значение_если_ложь])													
		1	2	3	4	5	6	7							
112	7														
113	1	15,00000	-5,00000	1,00000	-3,00000	4,00000	3,00000	-1,00000				5,000000			
114	2	0,00000	16,66667	3,86667	1,40000	2,46667	-5,40000	2,13333				3,333333			
115	3	0,00000	0,00000	10,21600	-3,50800	-1,27600	-0,61200	0,46400				5,600000			U
116	4	0,00000	0,00000	0,00000	18,31715	-1,91543	-2,75881	-3,75803				6,610023			
117	5	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	16,62915	-5,69501	-2,64685				12,812684			
118	6	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	18,54943	5,11633				9,113241			
119	7	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	11,58512				8,058298			
120															
121															
122															
123	7		1	2	3	4	5	6	7						11
124	1		1	0	0	0	0	0	0			=ЕСЛИ(A124<>			
125	2		0,13333333	1	0	0	0	0	0			4			
126	3		-0,06666667	0,22	1	0	0	0	0			6			
127	4		-0,2	-0,3	0,426781519	1	0	0	0			7			
128	5		-0,13333333	-0,04	-0,46123727	-0,216301	1	0	0			8			
129	6		-0,13333333	-0,28	0,216914644	0,2048865	-0,0064208	1	0			10			L
130	7		-0,06666667	0,04	0,28504307	0,2589885	-0,178735	0,123294828	1			10			
131															
132															
133															
134	7		1	2	3	4	5	6	7						
135	Y		5,00000	3,33333	5,60000	6,61002	12,81268	9,11324	8,05830						
136															
137						7	6	5	4	3	2	1			
138						0,06346	-0,19676	0,88111	0,65154	0,98376	0,29944	0,69557			
139			0,06346	-0,19676	0,88111	0,65154	0,98376	0,29944	0,69557				X		

Рис.8. Получение матрицы L

Решение системы $LY = B$ формируется в диапазоне C135:L135. Для этого в ячейку C135 вводится формула (9), в ячейку D135 – формула (10), которая затем распространяется на диапазон E135:L135 (рис. 8).

$$=ЕСЛИ(A124<>"";M3;"") \quad (8)$$

$$=M124 \quad (9)$$

$$=ЕСЛИ(D123<>"";СМЕЩ(M124;D123-1;0;1;1)-СУММПРОИЗВ(СМЕЩ(C135;0;0;1;D$123-1);СМЕЩ($C$124;D$123-1;0;1;D$123-1));"") \quad (10)$$

СЧЁТЕСЛИ		=ЕСЛИ(A113<>"";ГПР(A113;\$C\$134:\$L\$135;2);"")							L	M	P	Q	R		
		ГПР(искомое_значение; таблица; номер_строки; [интервальный_просмотр])													
		1	2	3	4	5	6	7							
113	1	15,00000	-5,00000	1,00000	-3,00000	4,00000	3,00000	-1,00000				=ЕСЛИ(A113<			
114	2	0,00000	16,66667	3,86667	1,40000	2,46667	-5,40000	2,13333				3,333333			
115	3	0,00000	0,00000	10,21600	-3,50800	-1,27600	-0,61200	0,46400				5,600000			U
116	4	0,00000	0,00000	0,00000	18,31715	-1,91543	-2,75881	-3,75803				6,610023			
117	5	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	16,62915	-5,69501	-2,64685				12,812684			
118	6	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	18,54943	5,11633				9,113241			
119	7	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	11,58512				8,058298			
120															
121															
122															
123	7		1	2	3	4	5	6	7						11
124	1		1	0	0	0	0	0	0						5
125	2		0,13333333	1	0	0	0	0	0						4
126	3		-0,06666667	0,22	1	0	0	0	0						6
127	4		-0,2	-0,3	0,426781519	1	0	0	0						7
128	5		-0,13333333	-0,04	-0,46123727	-0,216301	1	0	0						8
129	6		-0,13333333	-0,28	0,216914644	0,2048865	-0,0064208	1	0						10
130	7		-0,06666667	0,04	0,28504307	0,2589885	-0,178735	0,123294828	1						10
131															
132															
133															
134	7		1	2	3	4	5	6	7						
135	Y		5,00000	3,33333	5,60000	6,61002	12,81268	9,11324	8,05830						
136															
137						7	6	5	4	3	2	1			
138						0,06346	-0,19676	0,88111	0,65154	0,98376	0,29944	0,69557			
139			0,06346	-0,19676	0,88111	0,65154	0,98376	0,29944	0,69557				X		

Рис.9. Получение столбца свободных членов системы $UX = Y$

Столбец свободных членов системы $UX = Y$ получен вводом в ячейку M113 формулы (11) и дальнейшим распространением ее на диапазон M114: M122.

Решение системы $UX = Y$ производится в диапазоне C138:L138. В ячейку L138 вводим формулу (12), в ячейку K138 вводим формулу (13) и распространяем ее влево на диапазон C138:J138 (рис. 9). Для удобства восприятия в диапазоне C139:L139 получен вектор X путем ввода формулы (14) в ячейку C139 с дальнейшим распространением этой формулы на весь указанный диапазон (рис. 9).

$$=ЕСЛИ(A113<>"";ГПР(A113;C134:L135;2);"") \quad (11)$$

$$=СМЕЩ(M122;-(10-A112);0;1;1)/ \quad (12)$$

$$СМЕЩ(M122;-(10-A112);-(10-A112)-1;1;1) \quad (12)$$

$$=ЕСЛИ(K137<>"";(СМЕЩ(M122;-(10-A112)-L137;0;1;1)- \quad (13)$$

$$СУММПРОИЗВ(СМЕЩ(M122;-(10-A112)-L137;-(10-A112)- \quad (13)$$

$$L137;1;K137-1);L138:L138))/СМЕЩ(M122;-(10-A112)-L137;-(10- \quad (13)$$

$$$A$112)-L137-1;1;1);"") \quad (13)$$

$$=ЕСЛИ(C134<>"";ГПР(A134-C134+1;C137:L138;2;ЛОЖЬ);"") \quad (14)$$

$$=ЕСЛИ(A142<>"";СУММПРОИЗВ(C139:L139;C3:L3);"") \quad (15)$$

Проверка правильности полученного решения производится в диапазоне B142: B151 формулой (15) (рис. 10). Справа в столбце C находится исходный столбец свободных членов.

СЧЁТЕСЛИ				=ЕСЛИ(A142<>"";СУММПРОИЗВ(\$C\$139:\$L\$139;C3:L3);"")	
	A	B	C	ЕСЛИ(лог_выражение; [значение_если_истина]; [значение_если_ложь])	
142	1	=ЕСЛИ(A142	5		
143	2	4,000000	4		
144	3	6,000000	6		
145	4	7,000000	7		
146	5	8,000000	8		
147	6	10,000000	10		
148	7	10,000000	10		
149					

Рис. 10. Проверка правильности полученного решения

Еще один вариант проверки правильности выполненных вычислений приведен на рис. 11 в диапазоне C154:L163 умножением матриц L и U с использованием табличной формулы (16).

$$\{=ЕСЛИ(И($A124<>"";C$123<>"");СУММПРОИЗВ(СМЕЩ(C124;$A1 \quad (16)$$

$$24-1;0;1;A123);ТРАНСП(СМЕЩ(C113;0;C$123-1;$A$123;1)));"")\}$$

C154		={ЕСЛИ(И({\$A124<>"";C\$123<>""});СУММПРОИЗВ(СМЕЩ(С\$C124;A124-1;0;1;A\$123);ТРАНСП(СМЕЩ(С\$C113;0;C\$123-1;A\$123;1));""))}															
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	P	Q	R	Z
154	1		15	-5	1	-3	4	3	-1								
155	2		2	16	4	1	3	-5	2								
156	3		-1	4	11	-3	-1	-2	1								
157	4		-3	-4	3	17	-4	-2	-4								
158	5		-2	0	-5	-2	17	-5	-2				L+U				
159	6		-2	-4	1	3	-2	19	4								
160	7		-1	1	3	4	-4	2	12								
161																	
162																	
163																	
164																	
165																	
166			15	-5	1	-3	4	3	-1								
167			2	16	4	1	3	-5	2								
168			-1	4	11	-3	-1	-2	1								
169			-3	-4	3	17	-4	-2	-4								
170			-2	0	-5	-2	17	-5	-2				A				
171			-2	-4	1	3	-2	19	4								
172			-1	1	3	4	-4	2	12								
173																	

Рис. 11. Проверка правильности полученного решения путем умножения матриц L и U
 На рисунках 12, 13 и 4 приведено решение для n=10.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	P	Q	R
2	10		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11			
3	1	1	15,000000	-5,000000	1,000000	-3,000000	4,000000	3,000000	-1,000000	10,000000	2,000000	10,000000	5,000000		15	1
4	2	0,1333333333	2,000000	16,000000	4,000000	1,000000	3,000000	-5,000000	2,000000	5,000000	5,000000	7,000000	4,000000			
5	3	-0,0666666667	-1,000000	4,000000	11,000000	-3,000000	-1,000000	-2,000000	1,000000	10,000000	5,000000	4,000000	6,000000			
6	4	-0,2	-3,000000	-4,000000	3,000000	17,000000	-4,000000	-2,000000	-4,000000	5,000000	9,000000	9,000000	7,000000			
7	5	-0,1333333333	-2,000000	0,000000	-5,000000	-2,000000	17,000000	-5,000000	-2,000000	7,000000	1,000000	6,000000	8,000000			
8	6	-0,1333333333	-2,000000	-4,000000	1,000000	3,000000	-2,000000	19,000000	4,000000	6,000000	4,000000	10,000000	10,000000			
9	7	-0,0666666667	-1,000000	1,000000	3,000000	4,000000	-4,000000	2,000000	12,000000	2,000000	9,000000	10,000000	10,000000			
10	8	0,0666666667	1,000000	10,000000	4,000000	2,000000	9,000000	6,000000	2,000000	10,000000	5,000000	4,000000	6,000000			
11	9	0,5333333333	8,000000	9,000000	5,000000	9,000000	7,000000	3,000000	10,000000	5,000000	9,000000	9,000000	7,000000			
12	10	0,5333333333	8,000000	10,000000	3,000000	6,000000	5,000000	7,000000	5,000000	7,000000	1,000000	6,000000	8,000000			
13	10		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11			
14	1	0	15,000000	-5,000000	1,000000	-3,000000	4,000000	3,000000	-1,000000	10,000000	2,000000	10,000000	5,000000	16,66666667	2	
15	2	1	0,000000	16,666667	3,866667	1,400000	2,466667	-5,400000	2,133333	3,666667	4,733333	5,666667	3,333333			
16	3	0,22	0,000000	3,666667	11,066667	-3,200000	-0,733333	-1,800000	0,933333	10,666667	5,133333	4,666667	6,333333			
17	4	-0,3	0,000000	-5,000000	3,200000	16,400000	-3,200000	-1,400000	-4,200000	7,000000	9,400000	11,000000	8,000000			
18	5	-0,04	0,000000	-0,666667	-4,866667	-2,400000	17,533333	-4,600000	-2,133333	8,333333	1,266667	7,333333	8,666667			
19	6	-0,28	0,000000	-4,666667	1,133333	2,600000	-1,466667	19,400000	3,866667	7,333333	4,266667	11,333333	10,666667			
20	7	0,04	0,000000	0,666667	3,066667	3,800000	-3,733333	2,200000	11,933333	2,666667	9,133333	10,666667	10,333333			
21	8	0,62	0,000000	10,333333	3,933333	2,200000	8,733333	5,800000	2,066667	9,333333	4,866667	3,333333	5,666667			
22	9	0,7	0,000000	11,666667	4,466667	10,600000	4,866667	1,400000	10,533333	-0,333333	7,933333	3,666667	4,333333			
23	10	0,76	0,000000	12,666667	2,466667	7,600000	2,866667	5,400000	5,533333	1,666667	-0,066667	0,666667	5,333333			
24	10		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11			
25	1	0	15,000000	-5,000000	1,000000	-3,000000	4,000000	3,000000	-1,000000	10,000000	2,000000	10,000000	5,000000	10,216	3	
26	2	0	0,000000	16,666667	3,866667	1,400000	2,466667	-5,400000	2,133333	3,666667	4,733333	5,666667	3,333333			
27	3	1	0,000000	0,000000	10,216000	-3,508000	-1,276000	-0,612000	0,464000	9,860000	4,092000	3,420000	5,600000			
28	4	0,426781519	0,000000	0,000000	4,360000	16,820000	-2,460000	-3,020000	-3,560000	8,100000	10,820000	12,700000	9,000000			
29	5	-0,46123727	0,000000	0,000000	-4,712000	-2,344000	17,632000	-4,816000	-2,048000	8,480000	1,456000	7,560000	8,800000			
30	6	0,216914644	0,000000	0,000000	2,216000	2,992000	-0,776000	17,888000	4,464000	8,360000	5,592000	12,920000	11,600000			
31	7	0,28504307	0,000000	0,000000	2,912000	3,744000	-3,832000	2,416000	11,848000	2,520000	8,944000	10,440000	10,200000			
32	8	0,150352388	0,000000	0,000000	1,536000	1,332000	7,204000	9,148000	0,744000	7,060000	1,932000	-0,180000	3,600000			
33	9	0,172278778	0,000000	0,000000	1,760000	9,620000	3,140000	5,180000	9,040000	-2,900000	4,620000	-0,300000	2,000000			
34	10	-0,04620204	0,000000	0,000000	-0,472000	6,536000	0,992000	9,504000	3,912000	-1,120000	-3,664000	-3,640000	2,800000			
35	10		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11			
36	1	0	15,000000	-5,000000	1,000000	-3,000000	4,000000	3,000000	-1,000000	10,000000	2,000000	10,000000	5,000000	18,31714957	4	
37	2	0	0,000000	16,666667	3,866667	1,400000	2,466667	-5,400000	2,133333	3,666667	4,733333	5,666667	3,333333			
38	3	0	0,000000	0,000000	10,216000	-3,508000	-1,276000	-0,612000	0,464000	9,860000	4,092000	3,420000	5,600000			
39	4	1	0,000000	0,000000	0,000000	18,317150	-1,915427	-2,758810	-3,758027	3,891934	9,073610	11,240407	6,610023			
40	5	-0,21630114	0,000000	0,000000	0,000000	-3,962020	17,043461	-5,098277	-1,833986	13,027800	3,343383	9,137431	11,382929			
41	6	0,204886495	0,000000	0,000000	0,000000	3,752937	-0,499217	18,020752	4,363352	6,221222	4,704385	12,178152	10,385278			
42	7	0,2589885	0,000000	0,000000	0,000000	4,743931	-3,468285	2,590446	11,715740	-0,290525	7,777604	9,465153	8,603759			
43	8	0,101513403	0,000000	0,000000	0,000000	1,859436	7,395850	9,240016	0,674236	5,577525	1,316758	-0,694205	2,758027			
44	9	0,558184772	0,000000	0,000000	0,000000	10,224354	3,359828	5,285435	8,960063	-4,598669	3,915035	-0,889193	1,035239			
45	10	0,347975717	0,000000	0,000000	0,000000	6,373923	0,933046	9,475724	3,933438	-0,664448	-3,474941	-3,481989	3,058731			
46	10		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11			
47	1	0	15,000000	-5,000000	1,000000	-3,000000	4,000000	3,000000	-1,000000	10,000000	2,000000	10,000000	5,000000	16,62915224	5	
48	2	0	0,000000	16,666667	3,866667	1,400000	2,466667	-5,400000	2,133333	3,666667	4,733333	5,666667	3,333333			
49	3	0	0,000000	0,000000	10,216000	-3,508000	-1,276000	-0,612000	0,464000	9,860000	4,092000	3,420000	5,600000			
50	4	0	0,000000	0,000000	0,000000	18,317150	-1,915427	-2,758810	-3							

57	10		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11		
58	1	0	15,000000	-5,000000	1,000000	-3,000000	4,000000	3,000000	-1,000000	10,000000	2,000000	10,000000	5,000000	18,5494283	6
59	2	0	0,000000	16,666667	3,866667	1,400000	2,466667	-5,400000	2,133333	3,666667	4,733333	5,666667	3,333333		
60	3	0	0,000000	0,000000	10,216000	-3,508000	-1,276000	-0,612000	0,464000	9,860000	4,092000	3,420000	5,600000		
61	4	0	0,000000	0,000000	0,000000	18,317150	-1,915427	-2,758810	-3,758027	3,891934	9,073610	11,240407	6,610023		
62	5	0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	16,629152	-5,695011	-2,646851	13,869629	5,306015	11,568744	12,812684		
63	6	1	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	18,549428	5,116326	5,512870	2,879394	9,949424	9,113241		
64	7	0,123294828	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	2,287049	12,215941	1,180497	6,376014	8,621756	9,181914		
65	8	0,653364088	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	12,119530	2,263868	-1,148279	-2,026238	-7,115751	-3,761263		
66	9	0,449726152	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	8,342163	11,762695	-10,465109	-2,562914	-10,244624	-6,066892		
67	10	0,592122275	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	10,983530	5,495742	-3,352875	-7,142726	-8,506182	-0,473856		
68	10		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11		
69	1	0	15,000000	-5,000000	1,000000	-3,000000	4,000000	3,000000	-1,000000	10,000000	2,000000	10,000000	5,000000	11,58512422	7
70	2	0	0,000000	16,666667	3,866667	1,400000	2,466667	-5,400000	2,133333	3,666667	4,733333	5,666667	3,333333		
71	3	0	0,000000	0,000000	10,216000	-3,508000	-1,276000	-0,612000	0,464000	9,860000	4,092000	3,420000	5,600000		
72	4	0	0,000000	0,000000	0,000000	18,317150	-1,915427	-2,758810	-3,758027	3,891934	9,073610	11,240407	6,610023		
73	5	0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	16,629152	-5,695011	-2,646851	13,869629	5,306015	11,568744	12,812684		
74	6	0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	18,549428	5,116326	5,512870	2,879394	9,949424	9,113241		
75	7	1	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	11,585124	0,500789	6,020999	7,395043	8,058298		
76	8	-0,09313281	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	-1,078955	-4,750191	-3,907531	-13,616348	-9,715527		
77	9	0,816715441	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	9,461750	-12,944391	-3,857853	-14,719140	-10,165354		
78	10	0,212880892	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	2,466252	-6,617168	-8,847679	-14,397458	-5,870009		
79	10		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11		
80	1	0	15,000000	-5,000000	1,000000	-3,000000	4,000000	3,000000	-1,000000	10,000000	2,000000	10,000000	5,000000	-4,70355081	8
81	2	0	0,000000	16,666667	3,866667	1,400000	2,466667	-5,400000	2,133333	3,666667	4,733333	5,666667	3,333333		
82	3	0	0,000000	0,000000	10,216000	-3,508000	-1,276000	-0,612000	0,464000	9,860000	4,092000	3,420000	5,600000		
83	4	0	0,000000	0,000000	0,000000	18,317150	-1,915427	-2,758810	-3,758027	3,891934	9,073610	11,240407	6,610023		
84	5	0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	16,629152	-5,695011	-2,646851	13,869629	5,306015	11,568744	12,812684		
85	6	0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	18,549428	5,116326	5,512870	2,879394	9,949424	9,113241		
86	7	0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	11,585124	0,500789	6,020999	7,395043	8,058298		
87	8	1	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	-4,703551	-3,346778	-12,927627	-8,965035		
88	9	2,839002556	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	-13,353393	-8,775296	-20,758787	-16,746691		
89	10	1,429510728	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	-6,723776	-10,129435	-15,971722	-7,585467		
90	10		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11		
91	1	0	15,000000	-5,000000	1,000000	-3,000000	4,000000	3,000000	-1,000000	10,000000	2,000000	10,000000	5,000000	0,726216323	9
92	2	0	0,000000	16,666667	3,866667	1,400000	2,466667	-5,400000	2,133333	3,666667	4,733333	5,666667	3,333333		
93	3	0	0,000000	0,000000	10,216000	-3,508000	-1,276000	-0,612000	0,464000	9,860000	4,092000	3,420000	5,600000		
94	4	0	0,000000	0,000000	0,000000	18,317150	-1,915427	-2,758810	-3,758027	3,891934	9,073610	11,240407	6,610023		
95	5	0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	16,629152	-5,695011	-2,646851	13,869629	5,306015	11,568744	12,812684		
96	6	0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	18,549428	5,116326	5,512870	2,879394	9,949424	9,113241		
97	7	0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	11,585124	0,500789	6,020999	7,395043	8,058298		
98	8	0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	-4,703551	-3,346778	-12,927627	-8,965035		
99	9	1	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,726216	15,942778	8,705068		
100	10	-7,36031312	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	-5,345180	2,508459	5,230148		
101	10		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11		
102	1	0	15,000000	-5,000000	1,000000	-3,000000	4,000000	3,000000	-1,000000	10,000000	2,000000	10,000000	5,000000	119,8522993	10
103	2	0	0,000000	16,666667	3,866667	1,400000	2,466667	-5,400000	2,133333	3,666667	4,733333	5,666667	3,333333		
104	3	0	0,000000	0,000000	10,216000	-3,508000	-1,276000	-0,612000	0,464000	9,860000	4,092000	3,420000	5,600000		
105	4	0	0,000000	0,000000	0,000000	18,317150	-1,915427	-2,758810	-3,758027	3,891934	9,073610	11,240407	6,610023		
106	5	0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	16,629152	-5,695011	-2,646851	13,869629	5,306015	11,568744	12,812684		
107	6	0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	18,549428	5,116326	5,512870	2,879394	9,949424	9,113241		
108	7	0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	11,585124	0,500789	6,020999	7,395043	8,058298		
109	8	0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	-4,703551	-3,346778	-12,927627	-8,965035		
110	9	0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,726216	15,942778	8,705068		
111	10	1	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	119,852299	69,302171		
112	10		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11		
113	1		15,00000	-5,00000	1,00000	-3,00000	4,00000	3,00000	-1,00000	10,00000	2,00000	10,00000	5,00000		
114	2		0,00000	16,66667	3,86667	1,40000	2,46667	-5,40000	2,13333	3,66667	4,73333	5,66667	3,33333		
115	3		0,00000	0,00000	10,21600	-3,50800	-1,27600	-0,61200	0,46400	9,86000	4,09200	3,42000	5,60000		U
116	4		0,00000	0,00000	0,00000	18,31715	-1,91543	-2,75881	-3,75803	3,89193	9,07361	11,24041	6,610023		
117	5		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	16,62915	-5,69501	-2,64685	13,86963	5,30602	11,56874	12,812684		
118	6		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	18,54943	5,11633	5,51287	2,87939	9,94942	9,113241		
119	7		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	11,58512	0,50079	6,02100	7,39504	8,058298		
120	8		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	-4,70355	-3,34678	-12,92763	-8,965035		
121	9		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,72622	15,94278	8,705068		
122	10		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	119,85230	69,302171		
123	10		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11		
124	1		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	
125	2		0,13333333	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	
126	3		-0,06666667	0,22	1	0	0	0	0	0	0	0	0	6	
127	4		-0,2	-0,3	0,426781519	1	0	0	0	0	0	0	0	7	
128	5		-0,13333333	-0,04	-0,46123727	-0,216301	1	0	0	0	0	0	0	8	
129	6		-0,13333333	-0,28	0,216914644	0,2048865	-0,0064208	1	0	0	0	0	0	10	
130	7		-0,06666667	0,04	0,28504307	0,2589885	-0,178735	0,123294828	1	0	0	0	0	10	L
131	8		0,06666667	0,62	0,150352388	0,1015134	0,4564449	0,653364088	-0,0931328	1	0</				

141	10	проверка											
142	1	5,000000	5										
143	2	4,000000	4										
144	3	6,000000	6										
145	4	7,000000	7										
146	5	8,000000	8										
147	6	10,000000	10										
148	7	10,000000	10										
149	8	6,000000	6										
150	9	7,000000	7										
151	10	8,000000	8										
152													
153	10		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
154	1		15	-5	1	-3	4	3	-1	10	2	10	
155	2		2	16	4	1	3	-5	2	5	5	7	
156	3		-1	4	11	-3	-1	-2	1	10	5	4	
157	4		-3	-4	3	17	-4	-2	-4	5	9	9	
158	5		-2	0	-5	-2	17	-5	-2	7	1	6	L*U
159	6		-2	-4	1	3	-2	19	4	6	4	10	
160	7		-1	1	3	4	-4	2	12	2	9	10	
161	8		1	10	4	2	9	6	2	10	5	4	
162	9		8	9	5	9	7	3	10	5	9	9	
163	10		8	10	3	6	5	7	5	7	1	6	
164													

Рис. 14. Решение для n=10_3

Список литературы

1. Вержбицкий, В.М. Вычислительная линейная алгебра / В.М. Вержбицкий. – М.: Высш. шк., 2009. – 351 с.

Пчельник Владимир Константинович, доцент кафедры фундаментальной и прикладной математики Гродненского государственного университета имени Янки Купалы, кандидат физико-математических наук, доцент, v_pchelnik@tut.by