

ИССЛЕДОВАНИЕ ТРАЕКТОРИЙ ДВИЖЕНИЯ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВНЕШНИХ СИЛ

И.А. Осадчий

Рассмотрены различные случаи перемещения центра масс абсолютно твердого тела. Приведены траектории его движения. Проведен анализ форм траекторий перемещения центра масс под воздействием гармонических внешних сил. Показано, что для использования в вибродиагностике информации о траектории движения центра масс необходимо учитывать факт взаимного влияния угловых и линейных составляющих вибрации. Приведена система уравнений, позволяющая описать любую траекторию перемещения центра масс абсолютно твердого тела в пространстве.

Введение

Кинематика твердого тела составляет фундаментальные разделы механики, ей посвящено большое количество научных работ и учебной литературы [1-3]. Приведенные в этих источниках уравнения движения позволяют рассчитать некоторые траектории перемещения тел, имеющих 6 степеней свободы. Сегодня задача диагностирования состояния объекта по параметрам вибраций зачастую сводится к определению частот и амплитуд колебаний и их анализу. При этом не учитывается характер вибраций, обуславливающий траекторию движения абсолютно твердого тела (АТТ).

Анализ форм колебаний вибрации позволит наиболее полно и точно оценить текущее состояние объекта, проследить изменение вибрационных характеристик элементов его конструкции, их реальное взаимодействие между собой, выявить ослабления в опорной конструкции объекта. Методы вибрационной диагностики в этом направлении активно осваиваются российскими учеными, которые уже добились ряда положительных результатов в методах векторной виброметрии [4-6].

Необходимость определения вида траектории движения центра масс АТТ обусловлена еще и тем, что большинство измерительных преобразователей обеспечивают измерение только линейных либо только угловых перемещений объектов. При сложном перемещении объекта этот факт может привести к неоднозначности или снижению точности измерения одной из названных составляющих.

Рассмотрим три варианта перемещения центра масс абсолютно твердого тела под воздействием гармонического возмущающего воздействия.

Вариант 1 – линейное перемещение центра масс АТТ по одной оси.

Линейное перемещение АТТ по оси Ox (рисунок 1) при возмущающем воздействии $f(t) = F \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$ можно записать в виде:

$$X(t) = S_x \sin(\omega_x t + \varphi_{x0}), \quad (1)$$

где F – максимальная амплитуда возмущающего воздействия;
 ω – круговая частота возмущающего воздействия;
 φ_0 – начальная фаза возмущающего воздействия;
 S_x – максимальная амплитуда перемещения тела вдоль оси Ox ;
 ω_x – угловая скорость изменения фазы колебания по оси Ox ;
 φ_{x0} – начальная фаза колебания.

Из выражения (1) и рисунка 1 видно, что величина перемещения АТТ вдоль оси Ox зависит от максимальной амплитуды и значения фазы в конкретный момент времени. Скорость перемещения тела зависит от круговой частоты возмущающего воздействия, а траектория движения представляет собой отрезок прямой линии, лежащей на оси Ox .

Таким образом, при движении центра масс тела вдоль одной оси имеет место только линейное перемещение. Абсолютно твердое тело имеет в этом случае одну степень свободы.

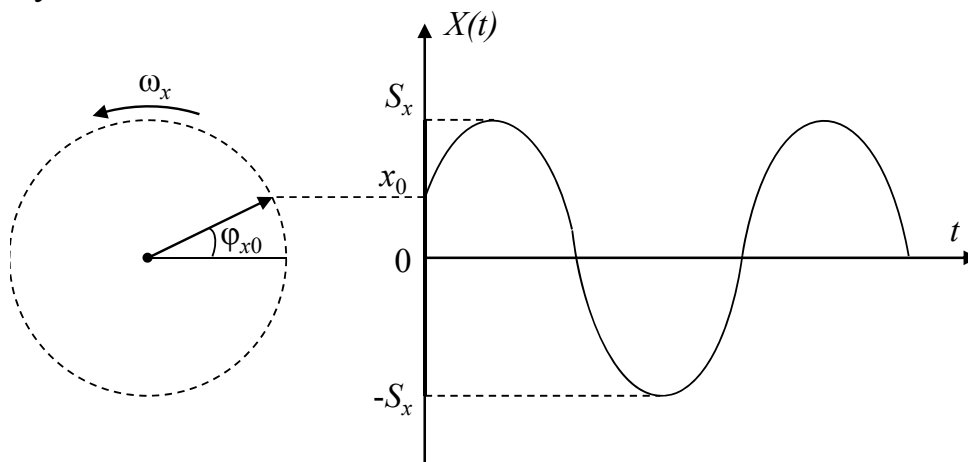


Рис.1. Перемещение АТТ вдоль оси Ox

Вариант 2 – линейное перемещение центра масс АТТ по двум осям.

Линейное перемещение центра масс АТТ в плоскости XOY можно описать системой уравнений вида

$$\begin{cases} S_x \sin(\omega_x t + \varphi_{x0}) = S_x (\psi_x) \\ S_y \sin(\omega_y t + \varphi_{y0}) = S_y (\psi_y) \end{cases} \quad (2)$$

где S_x, S_y - проекции перемещения на соответствующие оси координат XYZ .

При выполнении условий $S_x=S_y$, $\omega_x = \omega_y$ и $\varphi_{x0} = \varphi_{y0}$ траектория движения центра масс тела представляет собой отрезок NM некоторой прямой a (рисунок 2). Если $S_x \neq S_y$, то траектория движения центра масс имеет наклон, относительно осей системы координат.

На рисунке 2 показан частный случай перемещения центра масс. В общем случае траектория движения центра масс будет представлять собой эллипс в плоскости XOY . Траекторию движения в этом случае можно описать следующим уравнением

$$\frac{\sin^2(\psi_x)}{S_x^2} + \frac{\sin^2(\psi_y)}{S_y^2} = 1. \quad (2)$$

В зависимости от значений величин S_x , S_y , ψ_x и ψ_y траектория движения центра масс АТТ может принимать различный вид. Допустим, что $\varphi_{x0} = \varphi_{y0} = 0$. Учитывая принятое допущение, покажем некоторые из возможных траекторий движения центра масс АТТ (рисунок 3):

1. $S_x = S_y = l, \psi_x = \psi_y$;
2. $S_x = S_y = l, \psi_x = [0, 2\pi], \psi_y = \psi_x \pm \pi$;
3. $S_x = 2, S_y = l, \psi_x = \psi_y$;
4. $S_x = S_y = l, \psi_x = [0, 2\pi], \psi_y = \psi_x \pm \pi/2$;
5. $S_x = S_y = l, \psi_x = [0, 2\pi], \psi_y = \psi_x \pm \pi/3$;
6. $S_x = S_y = l, \psi_x = [0, 2\pi], \psi_y = \psi_x \pm 2\pi/3$;
7. $S_x = l, S_y = 2, \psi_x = [0, 2\pi], \psi_y = \psi_x \pm \pi/2$;
8. $S_x = 2, S_y = l, \psi_x = [0, 2\pi], \psi_y = \psi_x \pm \pi/2$.

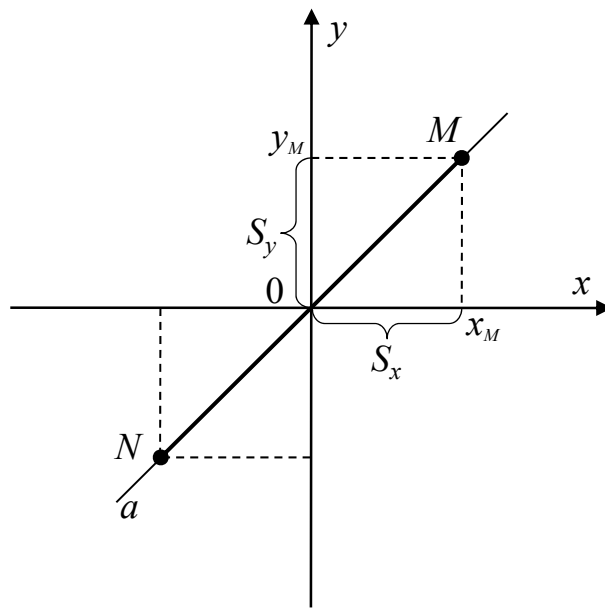


Рис.2. Прямолинейное перемещение центра масс АТТ по двум осям

Анализ графиков, изображенных на рисунке 3, показывает, что при равных или отличающихся на π углах сдвига фаз ψ_x и ψ_y траектория движения тела является отрезком прямой линии. При равных амплитудах перемещения S_x, S_y и разности сдвигов фаз ψ_x и ψ_y на $\pi/2$ траектория движения центра масс тела вырождается в окружность.

В остальных случаях траектория движения тела описывает эллипс, величина диагоналей которого зависит от соотношений величин S_x, S_y и ψ_x, ψ_y . В случае 5 и 6 видно, что при углах, меньших $|\pi/2|$ эллипс имеет положительный наклон, при углах, больших $|\pi/2|$ - отрицательный.

Направление движения тела по эллипсу всегда против часовой стрелки. Полученные результаты позволяют решить обратную задачу: определить угол ψ по форме эллипса.

Следует отметить, что при линейном движении АТТ в плоскости центр масс тела имеет две степени свободы (одна относительно оси Ox , другая относительно оси Oy).

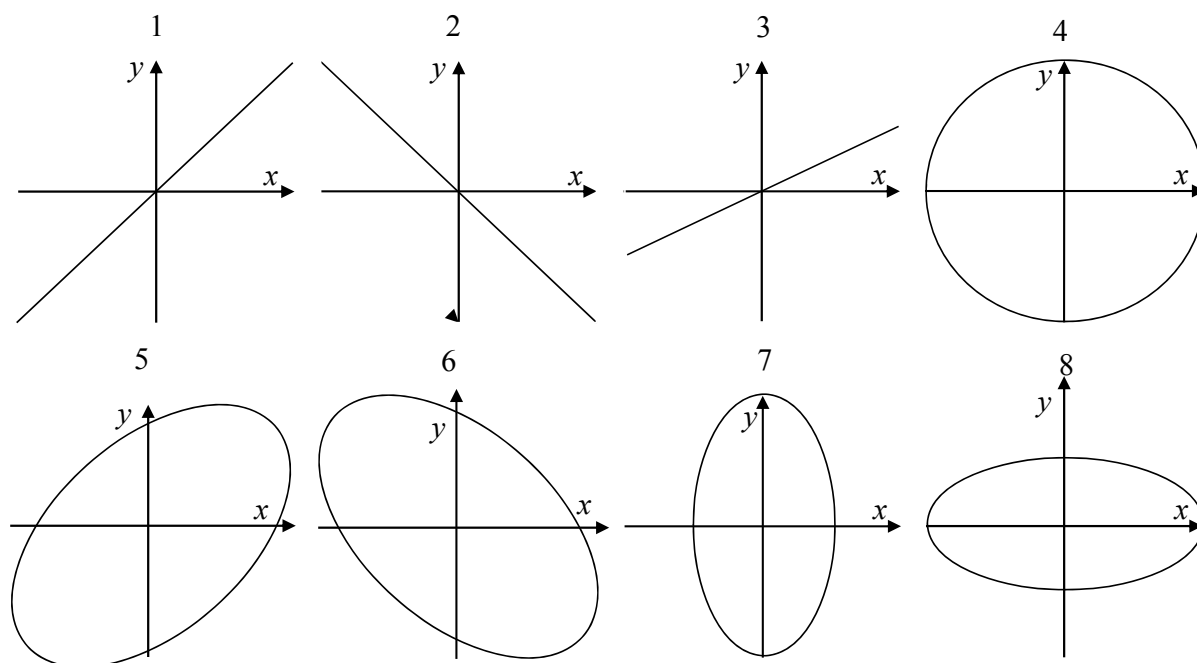


Рис.3. Траектории движения центра масс АТТ при различных амплитудах колебаний S_x , S_y и фазах ψ_x , ψ_y

Вариант 3 – линейное перемещение центра масс АТТ по трем осям.

Линейное перемещение центра масс АТТ в пространстве можно описать системой уравнений через проекции на оси декартовой системы:

$$\begin{cases} S_x(t) = S_x \cdot \sin(\omega_x t + \varphi_{x0}) \\ S_y(t) = S_y \cdot \sin(\omega_y t + \varphi_{y0}) \\ S_z(t) = S_z \cdot \sin(\omega_z t + \varphi_{z0}) \end{cases} \quad (3)$$

Данная система уравнений справедлива только при наличии не более одного возмущающего гармонического воздействия по каждой оси системы координат.

При линейном перемещении тела траектория движения его центра масс может описывать сложную геометрическую фигуру. Возможные варианты траекторий при единичных амплитудах будут заполнять в пространстве эллипсоид вращения. При этом большая ось эллипсоида будет лежать на прямой проходящей через центр системы координат под углом 45° ко всем осям.

Покажем некоторые из возможных траекторий движения центра масс АТТ в пространстве:

Случай 1. Траектория движения описывается системой уравнений (3) с параметрами: $S_x = S_y = S_z = 1$, $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 18$, $\varphi_{x0} = \varphi_{y0} = \varphi_{z0} = 0$; (рисунок 4);

Случай 2. Траектория движения описывается системой уравнений (3) с параметрами: $S_x = S_y = S_z = 1$, $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 18$, $\varphi_{x0} = \varphi_{y0} \pm \pi/2, \varphi_{z0} = 0$; (рисунок 5 пунктиром);

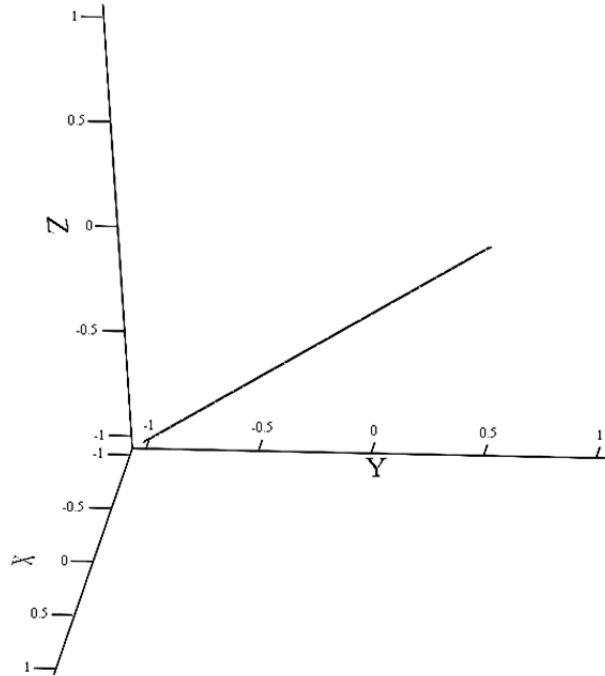


Рис.4. Траектория перемещения центра масс АТТ в случае 1

Случай 3. Траектория движения описывается системой уравнений (3) с параметрами: $S_x = S_y = S_z = 1$, $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 18$, $\varphi_{x0} = 0, \varphi_{z0} = \varphi_{y0} \pm \pi/2$; (рисунок 5 сплошной линией);

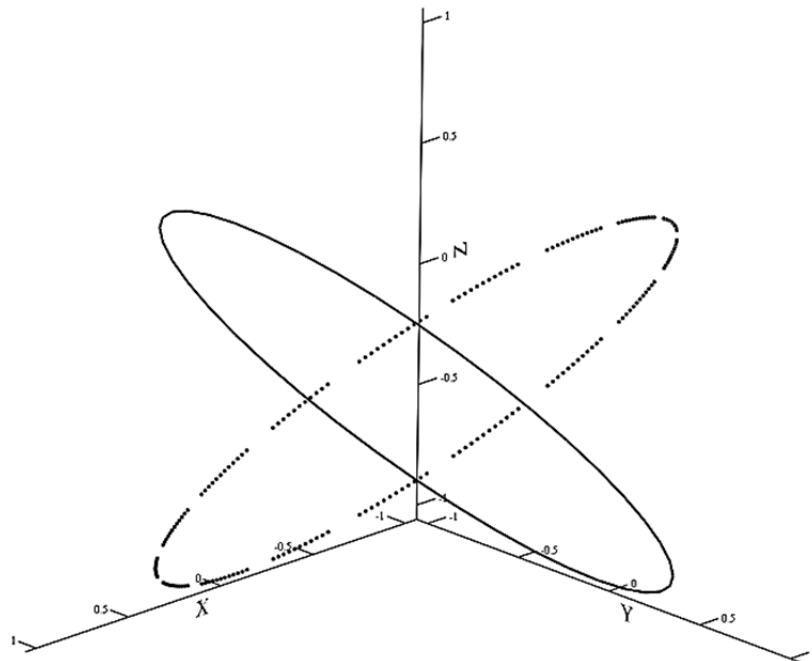


Рис.5. Траектории перемещения центра масс АТТ в случаях 2 (пунктиром) и 3 (сплошной линией)

Случай 4. Траектория движения описывается системой уравнений (3) с параметрами: $S_x = S_y = S_z = 1$, $\omega_x = 36$, $\omega_y = \omega_z = 18$, $\varphi_{x0} = 0$, $\varphi_{y0} = \varphi_{z0} \pm \pi/2$; (рисунок 6);

Случай 5. Траектория движения описывается системой уравнений (3) с параметрами: $S_x = S_y = S_z = 1$, $\omega_x = \omega_z = 18$, $\omega_y = 36$, $\varphi_{x0} = 0$, $\varphi_{y0} = \varphi_{z0} \pm \pi/2$; (рисунок 7 сплошной черной линией);

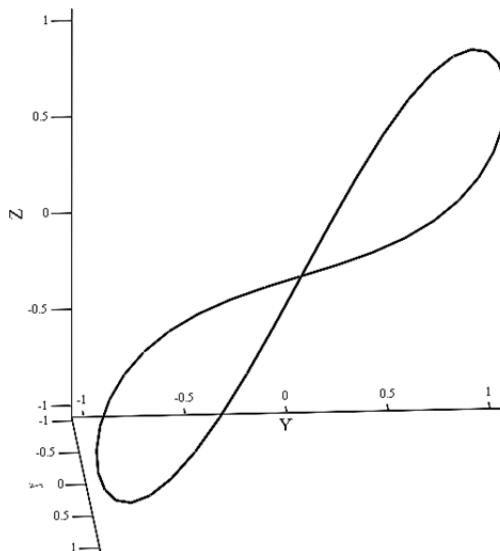


Рис.6. Траектория перемещения центра масс АТТ в случае 4

Случай 6. Траектория движения описывается системой уравнений (3) с параметрами: $S_x = S_y = S_z = 1$, $\omega_x = \omega_y = 18$, $\omega_z = 36$, $\varphi_{x0} = 0$, $\varphi_{y0} = \varphi_{z0} \pm \pi/2$; (рисунок 7 сплошной светлой линией);

Случай 7. Траектория движения описывается системой уравнений (3) с параметрами: $S_x = S_y = S_z = 1$, $\omega_x = \omega_z = 36$, $\omega_y = 18$, $\varphi_{x0} = 0$, $\varphi_{y0} = \varphi_{z0} \pm \pi/2$; (рисунок 7 пунктирной линией);

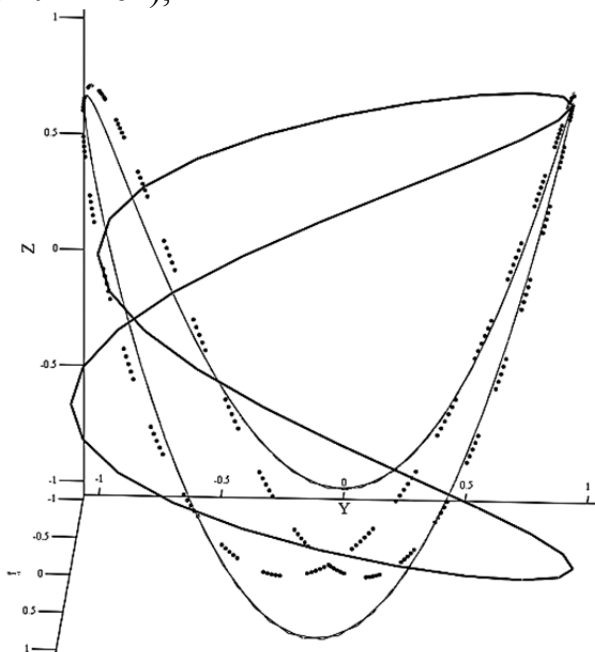


Рис.7. Траектории перемещения центра масс АТТ в случаях 5 (сплошной жирной линией), 6 (сплошной линией) и 7 (пунктиром)

Случай 8. Траектория движения описывается системой уравнений (3) с параметрами: $S_x = S_y = S_z = 1$, $\omega_x = \omega_y = 18$, $\omega_z = 36$, $\varphi_{x0} = 0$, $\varphi_{y0} = \varphi_{z0} \pm \pi/2$; (рисунок 8, 9);

Случай 9. Траектория движения описывается системой уравнений (3) с параметрами: $S_x = S_y = S_z = 1$, $\omega_x = 18$, $\omega_y = 24$, $\omega_z = 30$, $\varphi_{x0} = 0$, $\varphi_{y0} = \pm \pi/4$, $\varphi_{z0} = \pm \pi/2$ (рисунок 10, 11).

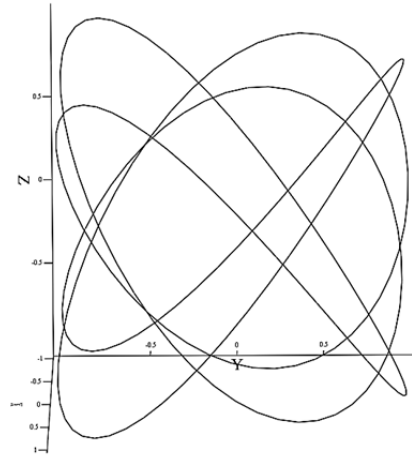


Рис.8. Траектория перемещения центра масс АТТ в случае 8

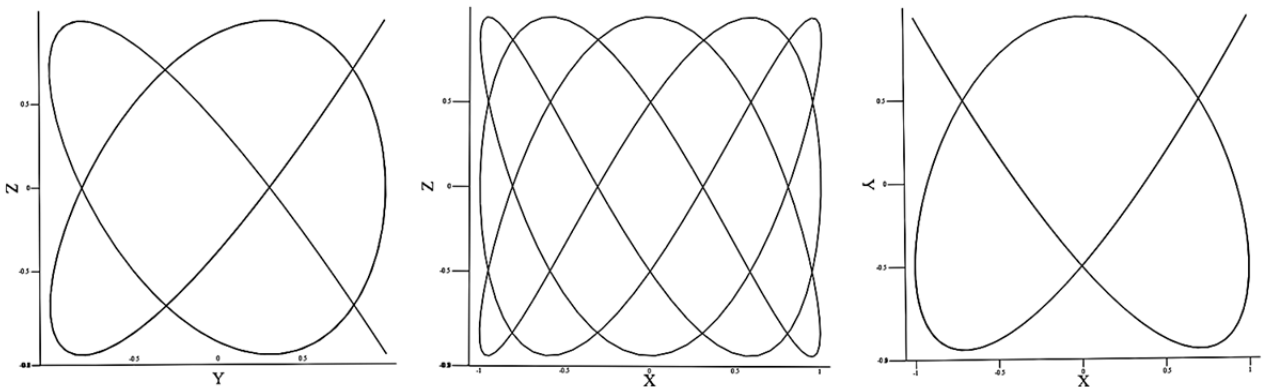


Рис.9. Траектория перемещения центра масс АТТ в случае 8 в проекциях на плоскости XOY , XOZ , ZOY

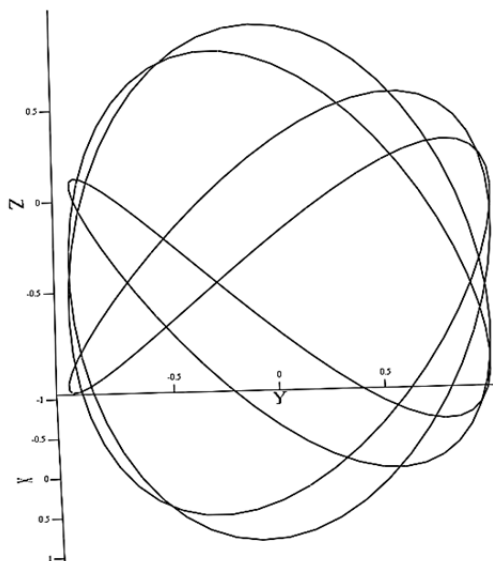


Рис.10. Траектория перемещения центра масс АТТ в случае 9

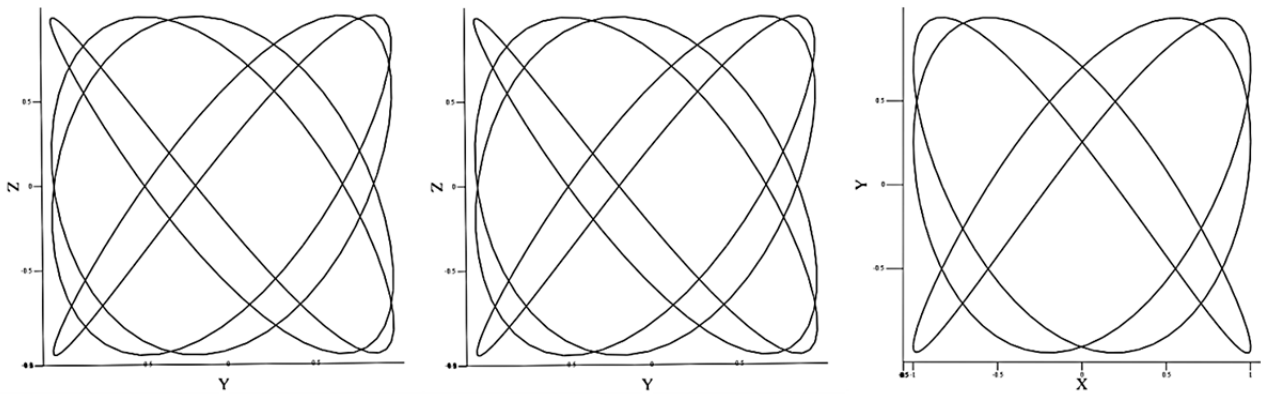


Рис.11. Траектория перемещения центра масс АТТ в случае 9
в проекциях на плоскости XOY , XOZ , ZOY

На рисунках 4 – 11 видно, что траектория перемещения центра масс АТТ в ряде случаев представляет собой сложные геометрические фигуры. Такие траектории движения тела в пространстве обладают малой информативностью. Поэтому на практике анализ перемещения точки (или тела) в пространстве целесообразно проводить по проекциям траектории перемещения на плоскости системы координат. Из графиков на рисунках 3 и 9 видно, что наличие возмущающих воздействий в трех взаимно ортогональных направлениях приводит к существенному усложнению траектории перемещения центра масс АТТ. Еще более сложная траектория получается в случае значительных различий фазовых составляющих возмущающих воздействий (случай 9, рисунок 10, 11). В наиболее общем случае возмущающее воздействие в каждом из трех взаимно ортогональных направлений может представлять собой сумму гармонических возмущений. Эти гармоники могут иметь различные параметры. Тогда сумма таких возмущений даст сложный закон изменения координат центра масс по каждой оси и в пространстве в целом (рисунок 12). В этом случае система уравнений (3) примет вид

$$\begin{cases} S_{x\Sigma}(t) = \sum_1^n A_n \cdot \sin(\omega_{xn}t + \varphi_{xn0}) \\ S_{y\Sigma}(t) = \sum_1^m B_m \cdot \sin(\omega_{ym}t + \varphi_{ym0}), \\ S_{z\Sigma}(t) = \sum_1^l C_l \cdot \sin(\omega_{zl}t + \varphi_{zl0}) \end{cases} \quad (4)$$

где n, m, l – порядковый номер гармонического возмущающего воздействия для осей Ox, Oy и Oz соответственно.

Данная система уравнений справедлива при наличии неограниченного количества возмущающих гармонических воздействий по каждой из осей системы координат.

Заключение

В общем случае центр масс АТТ имеет три степени свободы, а само АТТ имеет шесть степеней свободы: три степени линейного перемещения и три

степени свободы вращательного движения относительно осей системы координат.

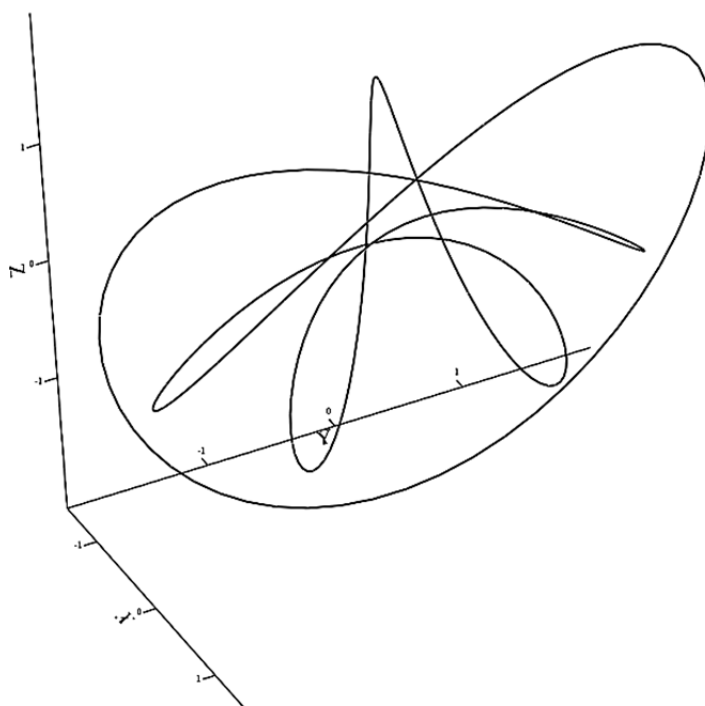


Рис.12. Траектория перемещения центра масс АТТ

Анализ линейного перемещение центра масс АТТ по двум осям показал, что в наиболее общих случаях (случаи 4-8) траектории движения нелинейные. Это обусловлено разностью фаз, а соответственно и разностью угловых скоростей возмущающих воздействий. Из уравнения (2) и системы (4) видно, что линейные и угловые перемещения однозначно связаны между собой. Поэтому появляется вероятность неверного определения перемещения центра масс АТТ. То есть, регистрируемые линейные колебания могут быть обусловлены угловыми, а регистрируемые угловые могут быть обусловлены линейными. Взаимное влияние линейной и угловой составляющих колебаний на результат их измерения более подробно рассматривалось в работе [7]. Факт их взаимного влияния усложняет процесс поиска источника вибрации. Поскольку наличие в составе исследуемого объекта большого количества подвижных элементов, может порождать виброколебания на близких или равных частотах.

Выводы

Методы векторной виброметрии являются современными и перспективными для целей виброналадки, диагностики и балансировки силовых агрегатов теплоэнергетических и других объектов. Качественный анализ форм колебаний вибрации, правильное представление ее характера являются основой эффективной вибродиагностики.

Рассмотренное линейное перемещение центра масс АТТ по одной оси является примером простого гармонического колебания, которое на практике используется для объяснения более сложных форм движения.

Траектории движения центра масс АТТ на плоскости при наличии двух гармонических воздействий с разными параметрами образуют в общем случае эллипс. При этом возникает неоднозначность и погрешность определения линейной (угловой) составляющей перемещения [7]. Этот факт следует учитывать при проведении вибрационных измерений.

Реальные траектории движения центра масс АТТ в пространстве представляют собой сложные геометрические фигуры (рисунки 5-12). Поэтому целесообразно проводить анализ форм и параметров колебаний вибрации с разделением по плоскостям и частотам.

Системой уравнений (4) можно описать траекторию перемещения центра масс АТТ в пространстве сколь угодно сложной формы, считая, что простейшее перемещение точки под воздействием вибрации подчиняется синусоидальному закону.

Список литературы

1. Яблонский, А.А. Курс теоретической механики: учеб. для вузов / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – М.: Интеграл-пресс, 2006. – 608 с.
2. Алешкевич, В.А. Колебания и волны. Лекции. / Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваев В.А. – М.: Физический факультет МГУ, 2001. – 144 с.
3. Матвеев, А.Н. Механика и теория относительности: учеб. для студентов вузов, Изд. 3-е. / А.Н. Матвеев. – М.: Мир и Образование, 2003. – 432 с.
4. Трехкомпонентный пьезоэлектрический виброакселерометр с одним чувствительным элементом: пат. 2229136 РФ, МПК G01P 15/09 / И.Б. Кобяков; заявитель Кобяков Игорь Борисович. – № 94019569/28; заявл. 29.11.02; опубл. 20.05.04 // Регистр интеллектуальной промышленной собственности. – 2004.
5. Кобяков И.Б. Трехкомпонентный виброакселерометр для систем вибрационной диагностики технических систем. / И.Б. Кобяков // Контроль. Диагностика. – 2001. – №10. – С. 17-18.
6. Куменко А.И. Вибрационные испытания опор турбоагрегата с использованием трехкомпонентных виброакселерометров нового поколения. / А.И. Куменко [и др.] // Теплоэнергетика. – 2003. – №6. – С. 36-43.
7. Осадчий И.А. Анализ угловых и линейных составляющих вибрации и способы их разделения в оптических измерительных системах. / И.А. Осадчий // Вестн. Воен. акад. Респ. Беларусь. – 2012. – №4. – С. 110–117.

Осадчий Игорь Александрович, преподаватель кафедры радиотехники Учреждения образования Военная академия Республики Беларусь, магистр технических наук, igor-2105@yandex.ru.