УДК 517.98

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ В ПРЕПОДАВАНИИ КУРСА «ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

В.В. Дайняк, К.В. Василевский, Е.С. Чеб

Рассматривается задача о построении проекции в гильбертовом пространстве на заданное подпространство с применением средств компьютерной математики. Данная задача является типовой при изучении гильбертовых пространств.

Развитие компьютерных технологий в образовании позволяет перейти на новый уровень преподавания такой фундаментальной дисциплины как функциональный анализ и интегральные уравнения. Применение компьютерной математики дает возможность наиболее эффективно построить образовательный процесс и углубить знания по прикладным аспектам функционального анализа. С одной стороны, в связи с уменьшение числа аудиторных часов, мы можем рассматривать часть материала как лабораторные работы, которые студенты будут выполнять самостоятельно в компьютерном классе. С другой стороны, наиболее трудоемкие вычисления, проделанные средствами компьютерной математики, освобождают на практических занятиях время для решения задач на доказательство. А именно эти задачи позволяют сформировать математическую культуру будущего специалиста.

Рассмотрим некоторые задачи, при решении которых используется пакет Wolfram Mathematica.

Задача 1. В гильбертовом пространстве l_2 найти ортогональную проекцию вектора $x_0 = (4,-1,2,0,....)$ на подпространство

$$L = \left\{ x \in l_2 : \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i} = 0,\, x_1 + 2x_2 = 0 \right\}.$$

Алгоритм решения задачи 1

1. Рассмотрим ортогональное дополнение к подпространству L в рассматриваемом пространстве $L^{\perp} = \left\{ z \in l_2 : (z,x)_{l_2} = \sum_{i=1}^{\infty} z_i x_i = 0, \forall x \in L \right\}$. Выпишем систему векторов, порождающих $L^{\perp}$:

$$e_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, ..., \frac{1}{3^i}, ... \right), e_2 = (1,2,0,...).$$

2. Запишем проекцию вектора x_0 сначала на $L^{\perp}$ $z = \alpha e_1 + \beta e_2$, где α, β – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению. Заметим, что ортогональное дополнение является конечномерным, поэтому искать проекцию на него просто.

3. По теореме о разложении гильбертова пространства в прямую сумму представим вектор x_0 в виде

$$x_0 = y + z, \tag{1}$$

где $y-$ проекция x_0 на подпространство L, а z, соответственно, на $L^{\perp}$. Умножим (1) скалярно в l_2 на векторы e_1 и e_2, вычислим скалярные произведения $(x_0, e_1), (x_0, e_2), (e_1, e_1), (e_2, e_1), (e_2, e_2)$. Относительно неизвестных α, β получаем систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\alpha(e_1, e_1) + \beta(e_1, e_2) = (x_0, e_1),$$
$$\alpha(e_2, e_1) + \beta(e_2, e_2) = (x_0, e_2).$$

При составлении системы учтено, что $(y, e_1) = 0, (y, e_2) = 0.$

4. Вычислим проекцию x_0 на L по формуле $y = x_0 - z$.

Практическая реализация в системе «Mathematica»

```
FormSequence[a_,b_]:=(ClearAll[sequence];
If[b==0, sequence={a/.{k→0}, a/.{k→1},"...",a,"..."},
sequence={a/.{k→1}, a/.{k→2},"...",a,"..."}];
sequence);

x0={4,-1,2,0,"..."}; e1=FormSequence[1/3^k,1];
e2={1,2,0,0,"..."};

z=α e1+β e2; z[[3]]="...";z[[5]]="...";

ee1=e1/.{"..."→0};ee2=e2/.{"..."→0};xx0=x0/.{"..."→0};
```

sol=Solve[{α$\sum_{k=1}^{\infty} e1[[4]]^2$+β ee1.ee2==x0.ee1, α ee2.ee1+β ee2.ee2==

□x0.ee2},{α,β}];

```
{α,β}={α,β}/.sol[[1]]
```

$$\left\{\frac{648}{41}, -\frac{278}{205}\right\}$$

```
z=Insert[z,a/27,3]; zz=z/.{"..."→0};xx0=Append[xx0,0]; y=xx0-
-zz; y/.{0→"..."}
```

$$\left\{\frac{18}{205}, -\frac{9}{205}, \frac{58}{41}, ..., -\frac{8 \times 3^{4-k}}{41}, ...\right\}.$$

Задача 2. В гильбертовом пространстве l_2 найти ортогональную проекцию вектора $x_0 = \left(1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2^i}, ...\right)$ на подпространство

$$L=\left\{\alpha x+\beta y\in l_2 : x=\left(1,\frac{1}{7},\ldots,\frac{1}{7^i},\ldots\right),\ y=\left(1,\frac{1}{8},\ldots,\frac{1}{8^i},\ldots\right)\right\}.$$

Алгоритм решения задачи 2

1. По теореме о разложении гильбертова пространства в прямую сумму представим вектор x_0 в виде

$$x_0=\alpha x+\beta y+z, \tag{2}$$

где $\alpha x+\beta y-$ проекция x_0 на L, а z, соответственно, на $L^{\perp}$. Умножим (2) скалярно в l_2 на векторы x и y и вычислим скалярные произведения $(x_0,x),(x_0,y),(x,x),(x,y),(y,y)$. Относительно неизвестных α,β получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\alpha(x,x)+\beta(x,y)=(x_0,x),$$
$$\alpha(y,x)+\beta(y,y)=(x_0,y).$$

При составлении системы учтено, что $(z,x)=0,(z,y)=0.$

2. Вычислим проекцию x_0 на L по формуле $z=\alpha x+\beta y.$

Практическая реализация в системе «Mathematica»

```
x0=FormSequence[1/2^k,0];x=FormSequence[1/7^k,0];
y=FormSequence[1/8^k,0];

xx=x/.{"..."→0}; yy=y/.{"..."→0};
```

sol=Solve[{$\alpha\sum_{k=1}^{\infty}x[[4]]^2$**+**$\beta\sum_{k=1}^{\infty}x[[4]]\,y[[4]]$**==**$\sum_{k=1}^{\infty}x0[[4]]\,x[[4]]$**,**$\alpha\sum_{k=1}^{\infty}x[[4]]\,y[[4]]$**+**$\beta\sum_{k=1}^{\infty}y[[4]]^2$**==**$\sum_{k=1}^{\infty}x0[[4]]\,y[[4]]$**},{α,β}];**

```
{α,β}={α,β}/.sol[[1]]
```

$$\left\{\frac{2112}{91},-\frac{1155}{52}\right\}$$

```
z=α xx+β yy; z/.{0→"..."}
```

$$\left\{\frac{363}{364},\frac{10\,989}{20\,384},\ldots,-\frac{1155}{13}\,2^{-2-3k}+\frac{2112}{13}\,7^{-1-k},\ldots\right\}.$$

Задача 3. В гильбертовом пространстве $L_2[-1,1]$ найти ортогональную проекцию функции $x_0(t)=e^t$ на подпространство

$$L=\left\{x(t)\in L_2[-1,1]: x(t)=x(-t),\int_0^1 x(t)dt=0\right\}.$$

Алгоритм решения задачи 3

1. Представим пространство $L_2[-1,1]$ в виде прямой суммы двух подпространств, подпространства L_1 четных и L_2 нечетных функций. Тогда $x(t) = x_1(t) + x_2(t),$ где

$$x_1(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \in L_1, \quad x_2(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \in L_2.$$

$L^{\perp}$ состоит из таких четных $z(t) = z(-t)$ функций, которые ортогональны четной функции $y(t) \in L_1$, т.е. $\int_{-1}^{1} y(t)z(t)dt = 2\int_{0}^{1} y(t)z(t)dt = 0.$ Таким образом, базисом в ортогональном дополнении служат функции $z(t)$ почти всюду равные 1.

1. Запишем представление для функции $x_1(t) = y(t) + z(t),$ где $y(t)-$ проекция функции $x_1(t)$ на L, а $z(t)$ – проекция этой же функции на ортогональное дополнение к L. Поскольку базис в ортогональном дополнении известен, а именно, он состоит из функции почти всюду равных единице, функция $z(t)$ вычисляется как сумма ряда Фурье, т.е.

$$z(t) = C_0 e_0(t), e_0(t) = 1, C_0 = \frac{\left(x_1(t), e_0(t)\right)_{L_2[-1,1]}}{\left(e_0(t), e_0(t)\right)_{L_2[-1,1]}}.$$

2. Вычисляем $y(t)$

$$y(t) = x_1(t) - C_0 e_0(t).$$

Практическая реализация в системе «Mathematica»

x1[t_]:=(e^{t}+e^{-t})/2; x2[t_]:=(e^{t}-e^{-t})/2;

e0[t_]:=1;C0= $\dfrac{\int_{-1}^{1} x1[t]\, e0[t] dt}{\int_{-1}^{1} e0[t]^2\, dt}$

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{e} + e\right)$$

y=x1[t]-C0 e0[t]

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e} - e\right) + \frac{1}{2}(e^{-t} + e^{t})\ .$$

Список литературы

1. Антоневич, А. Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения: учеб. пособие / А. Б. Антоневич, М. Х. Мазель, Я. В. Радыно. – Минск : БГУ, 2011. – 319 с.
2. Дайняк, В. В. Теория нормированных векторных пространств : метод указания и задания к лабораторным занятиям по функциональному анализу для студентов факультета прикладной математики и информатики / В. В. Дайняк, Е. С. Чеб . – Мн.: БГУ, 2005. – 82 с.

Дайняк Виктор Владимирович, доцент кафедры компьютерных технологий и систем факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент

Чеб Елена Сергеевна, доцент кафедры компьютерных технологий и систем факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент, cheb@bsu.by

Василевский Константин Викторович, доцент кафедры компьютерных технологий и систем факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент