УДК 004.056.55; 621.391.26

БЕЗЫЗБЫТОЧНОЕ ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ КЭМЕРОНОВСКИХ МАТРИЦ

А.И. Сергей, В.А. Липницкий

Исследованы характерные особенности классов эквивалентности кэмероновских матриц и их ранговая классификация. Разработаны эффективные алгоритмы подсчета и генерации в явном виде уникальных представителей классов кэмероновских матриц с применением метода динамического программирования. Конструктивно доказана более точная нижняя оценка общего количества классов эквивалентности.

Введение

Рассмотрим квадратную бинарную матрицу порядка n, содержащую в точности n единиц. Разрешается выполнять произвольную перестановку строк и/или столбцов матрицы. Все полученные в результате таких действий матрицы считаются эквивалентными исходной. Проблема заключается в том, чтобы описать классы эквивалентности, возникающие под действием перестановок строк/столбцов матриц из описанного множества P_n квадратных бинарных матриц n-го порядка с n единицами. Такие матрицы называют кэмероновскими, по фамилии ученого, инициировавшего их изучение.

Питер Кэмерон в 2007 году опубликовал список из 27 исследовательских проблем в области групп перестановок [1]. На третьей позиции в этом списке находится задача вычисления величины a_n – общего количества классов эквивалентности множества P_n (задача эквивалентна подсчету числа орбит квадрата симметрической группы). Оказалось, что кэмероновские матрицы возникают не только в теории групп, но имеют отношение еще и к теории графов. Проблема классификации таких матриц может быть переформулирована в терминах изоморфизмов двудольных графов с n ребрами. К сожалению, ни одна из этих трактовок проблемы не наводит на решение проблемы.

Структура классов настолько замысловата, что долгое время единственным способом вычисления a_n был метод «грубой силы», который требовал полного перебора матриц из P_n. В силу огромной мощности множества P_n, таким способом было найдено только 6 первых значений последовательности. Со временем выяснялись новые факты о последовательности a_n, совершенствовались методы подсчета и рекордный результат (102 первых члена последовательности) был получен с использованием леммы Бернсайда [2].

Метод, основанный на лемме Бернсайда, эффективно вычисляет общее количество классов эквивалентности, но при этом не дает никакой полезной информации об устройстве классов, их свойствах и характеристиках. Матрицы из P_n возникают в разнообразных областях науки и практики, таких как расшифровка кодов-произведений в защите информации, идентификация летящих объектов в радиолокации, описание реперных точек в распознавании изображений и т. д. Для практического применения гораздо большее значение имеют качественные характеристики классов, нежели количественные. Необходимы знания о внутреннем устройстве классов, их структуре. Помимо количества классов требуется получить список характерных представителей каждого класса эквивалентности.

В статье предлагается использовать клеточное представление кэмероновских матриц для анализа их структурных свойств, и демонстрируются возможности его применения для подсчета количества классов эквивалентности, генерации представителей классов, а также оценивания величины a_n.

Группировка единичных элементов матриц

Для подсчета числа классов эквивалентности матриц из множества P_n выделим в каждом классе своего представителя – матрицу, обладающую некоторыми уникальными признаками, характерными для единственной матрицы в рамках каждого класса. Дальнейший подсчет числа классов сводится к вычислению числа различных уникальных представителей.

Опишем один из возможных способов определения представителя классов матриц из множества P_n.

Единичные элементы матриц из множества P_n можно разбить на группы таким образом, что все единицы, находящиеся в одном столбце/строке будут принадлежать одной и той же группе. Такое разбиение единиц обладает тем свойством, что перестановка строк/столбцов, которые содержат единицы одной группы, не меняет положение единичных элементов других групп, другими словами, группы единиц под действием преобразования перемещаются изолированно друг от друга.

Для группировки единичных элементов матрицы построим вспомогательный граф из n вершин, каждая из которых соответствует единице в матрице. Соединим неориентированным ребром вершины этого графа, которые соответствуют единичным элементам из одной строки/столбца. Компоненты связности построенного графа формируют разбиение единиц матрицы на группы, обладающие вышеописанными свойствами.

Несмотря на то, что перестановка строк/столбцов матрицы меняет положение единичных элементов, разбиение единиц на группы инвариантно относительно такого преобразования. То есть для любых двух матриц, принадлежащих одному классу, можно установить соответствие между единичными элементами таким образом, что наборы групп, на которые разбиваются единицы обеих матриц, совпадут.

Уникальные представители связных и несвязных матриц

Отдельно выделим подмножество матриц, в котором все единицы входят в одну группу. Назовем такие матрицы связными. Кроме того, каждой группе из единичных элементов матрицы можно поставить в соответствие связную матрицу из множества P_n.

Рассмотрим некоторую группу единиц g матрицы $A \in P_n$ и покажем, как получить соответствующую ей связную матрицу. Вычеркнем из матрицы строки и столбцы, в которых отсутствуют единицы группы g. Так как в полученной матрице отсутствуют нулевые строки и столбцы, ее можно дополнить до размера $|g| \times |g|$ путем добавления нулевых строк слева и нулевых столбцов сверху. В результате получится связная матрица из множества $P_{|g|}$. Обозначим ее $M(g)$.

Так как количество групп единиц не изменяется под действием преобразования перестановки строк/столбцов, все матрицы, принадлежащие к одному классу эквивалентности, состоят из одинакового числа групп. В частности, каждый класс либо состоит целиком из связных матриц, либо целиком из несвязных.

Обозначим через $R(A)$ уникального представителя класса эквивалентности, в который входит матрица A.

Введем отношение порядка $<$ на множестве связных квадратных матриц из нулей и единиц следующим образом: $A < B$, если $|A| < |B|$ или $|A| = |B|$ и матрица A лексикографически меньше B (сравнение матриц выполняется построчно). В качестве представителя связного класса эквивалентности выберем минимальную матрицу в соответствии с введенным отношением порядка. То есть представителем класса эквивалентности связных матриц является лексикографически минимальная матрица из этого класса, так как все матрицы класса имеют одинаковый порядок.

Покажем, как определяется представитель $R(A)$ несвязного класса эквивалентности, в который входит матрица $A \in P_n$. Пусть единицы матрицы A разбиваются на k групп $g_1, g_2, \ldots, g_k$, причем $R(M(g_1)) \le R(M(g_2)) \le \ldots \le R(M(g_k))$ (сравнение выполняется в соответствии с описанным выше отношением порядка). Матрица $R(A)$ состоит из k квадратных клеток (аналогично жордановым клеткам), соответствующих группам единиц, причем i-я клетка матрицы равна $R(M(g_i))$.

Покажем, что матрица $R(A)$ принадлежит классу эквивалентности, в который входит матрица A. Очевидно, что $|R(A)| = |A| = n$, поэтому опишем способ перехода от матрицы А к матрице $R(A)$ путем перестановки строк и столбцов матрицы. Переставим строки и столбцы матрицы таким образом, чтобы первые $|g_1|$ строк и первые $|g_1|$ столбцов матрицы содержали все единичные элементы группы g_1 и, возможно, некоторое количество нулевых строк и столбцов. Перестановкой первых $|g_1|$ строк и первых $|g_1|$ столбцов добьемся того, чтобы на месте первой клетки стояла матрица $R(M(g_1))$. Заметим, что при этом единицы, относящиеся к другим группам, остались на своих местах, так как перестановка строк и столбцов в рамках одной группы единиц не влияет на остальные группы. Остальные клетки матрицы $R(A)$ получаются аналогичным образом.

Подсчет числа классов эквивалентности

Обозначим множество матриц-представителей классов эквивалентности P_n через F_n. Его подмножество, содержащее только связных представителей, обозначим через G_n. Для удобства введем также следующие обозначения: $f_n = |F_n|$, $g_n = |G_n|$.

В [3] описан оптимизированный алгоритм генерации всех представителей матриц из множества P_n, который основан на переборе всех матриц множества P_n с применением разного рода отсечений, сокращающих область перебора. Клеточный вид представителей матриц показывает, что любую матрицу-представителя можно получить, комбинируя некоторое количество связных клеток. Таким образом, для генерации всех представителей достаточно иметь список связных матриц-представителей. Для получения такого списка можно воспользоваться тем же самым алгоритмом из [3], добавив в него еще одно отсечение, которое исключит из рассмотрения несвязные матрицы.

В таблице 1 приведено сравнение величин F_n и G_n.

Таблица 1

Сравнение величин F_n и G_n

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	1	3	6	16	34	90	211	558	1430	3908
G_n	1	2	3	7	12	32	67	181	458	1295

Для начала рассмотрим алгоритм вычисления величины f_n при известных значениях g_n для $1 \le i \le n$, алгоритм генерации множества F_n по множествам G_i получится аналогичным образом.

Каждой матрице $A \in P_n$ можно сопоставить вектор $Z(A)$ длины n, такой, что $Z(A)_k$ равно количеству клеток порядка k матрицы A. Отметим, что для связных матриц этот вектор будет иметь вид $(0, 0, ..., 0, 1)$.

Для фиксированного вектора z можно вычислить количество матриц, которые он характеризует, то есть, количество матриц $A \in F_n$, для которых выполняется условие $Z(A) = z$. Для этого вычислим количество вариантов для каждой группы клеток одинакового порядка и скомбинируем полученные варианты. Для группы из k клеток порядка p имеется $\hat{C}_{g_p}^k$ вариантов, где $\hat{C}_n^k$ – число сочетаний из n элементов по k с повторениями. Из этого следует, что количество искомых матриц определяется по формуле

$$\prod_{i=1}^{n} \hat{C}_{g_i}^{z_i} = \prod_{i=1}^{n} C_{g_i+z_i-1}^{z_i}.$$

Для вычисления f_n достаточно просуммировать вышеприведенные произведения по всем корректным векторам z. Для корректности вектора необходимо выполнение условия $\sum_{i=1}^{n} iz_i = n$, которое означает, что общее количество единичных элементов матрицы равно n, так как количество единиц в клетке совпадает с ее порядком. Обозначим множество векторов z длины n, удовлетворяющих описанному условию, через Z_n. Тогда формула вычисления f_n примет следующий вид

$$f_n = \sum_{z \in Z_n} \prod_{i=1}^{n} \hat{C}_{g_i}^{z_i} .$$

Обозначим через $Z_{n,k}$ множество векторов $z \in Z_n$, таких, что все ненулевые значения вектора z находятся среди первых k элементов. Множеству векторов $Z_{n,k}$ соответствуют представители классов эквивалентности, состоящие из клеток, порядок которых не превышает k.

Применим метод динамического программирования. Вместо прямого вычисления f_n будем считать величину $d_{n,k}$, определяемую формулой

$$d_{n,k} = \sum_{z \in Z_{n,k}} \prod_{i=1}^{k} \hat{C}_{g_i}^{z_i} .$$

В соответствии с формулой, $d_{n,k}$ равно числу матриц представителей, состоящих из клеток, порядок которых не превышает k. Заметим, что $f_n = d_{n,k}$.

Легко видеть, что $d_{n,1} = 1$ для всех натуральных n. С учетом пустой матрицы получим, что $d_{0,0} = 1$, $d_{0,j} = 0, j > 0$. Выполним алгебраические преобразования формулы для $d_{n,k}$ при $k > 1$.

$$d_{n,k} = \sum_{z \in Z_{n,k}} \prod_{i=1}^{k} \hat{C}_{g_i}^{z_i} = \sum_{j=0}^{\lfloor n/k \rfloor} \sum_{z \in Z_{n,k}} \delta_{j,z_k} \prod_{i=1}^{k} \hat{C}_{g_i}^{z_i} = \sum_{j=0}^{\lfloor n/k \rfloor} \sum_{z \in Z_{n-jk,k-1}} \hat{C}_{g_k}^{j} \prod_{i=1}^{k-1} \hat{C}_{g_i}^{z_i} = \sum_{j=0}^{\lfloor n/k \rfloor} \hat{C}_{g_k}^{j} d_{n-jk,k-1} ,$$

где $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера.

Таким образом, полученная рекуррентная формула позволяет вычислить значение f_n при известных значениях g_i за полиномиальное время.

Генерация матриц из множества F_n

Как было заявлено выше, получить явное представление матриц из множества F_n, имея матрицы из множеств G_i, можно при помощи аналогичного алгоритма.

Упорядочим элементы множества G_n в соответствии с отношением порядка, введенным ранее. Обозначим i-й элемент в этом порядке через $G_n[i]$.

Обозначим через $D_{n,k}$ множество матриц-представителей порядка n, состоящих из клеток, порядок которых не превышает k. Несложно заметить, что $|D_{n,k}| = d_{n,k}$. Кроме того, множество $D_{n,n}$ совпадает с множеством F_n.

Также обозначим множество сочетаний из n элементов множества $\{1, 2, ..., n\}$ по k с повторениями через $\hat{C}_{n,k}$.

Очевидно, $D_{n,1} = \{E_n\}$. Запишем рекуррентную формулу пересчета $D_{n,k}$ для $k > 1$ по аналогии с $d_{n,k}$.

$$D_{n,k} = \bigcup_{i=0}^{\lfloor n/k \rfloor} \bigcup_{c \in \hat{C}_{g_k,i}} \bigcup_{A \in D_{n-ik,k-1}} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & diag(G_k[c[1]], G_k[c[2]], ..., G_k[c[i]]) \end{pmatrix}.$$

Приведенная формула позволяет, зная множества G_n для $1 \le i \le n$, получить в явном виде всех представителей классов эквивалентности множества P_n без выполнения перебора вариантов.

Ранг связных матриц и его свойства. Подсчет числа классов заданного порядка и ранга

В [4] предложена классификация матриц из множества P_n на основе их ранга, а также найдены точные формулы для числа классов эквивалентности матриц, имеющих ранг 1, 2, n, $n-1$, $n-2$, не зависящие от значений параметра n.

Разобьем множество матриц F_n на подмножества в зависимости от их ранга. Обозначим через F_n^r множество матриц $A \in F_n$, таких, что $rank(A) = r$. Через G_n^r обозначим подмножество связных матриц множества F_n^r. Также для удобства введем обозначения $f_n^r = \left|F_n^r\right|$, $g_n^r = \left|G_n^r\right|$.

Для матрицы $A \in P_n$ ранга r введем вспомогательную матрицу $Z_n^r(A)$ размера $n \times r$, такую, что $Z_n^r(A)_{i,j}$ равно количеству клеток матрицы A размера i, имеющих ранг j.

Очевидно, что для матрицы $Z_n^r(A)$ выполняются следующие свойства:

1. $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{r} i Z_n^r(A)_{i,j} = n$,
2. $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{r} j Z_n^r(A)_{i,j} = r$.

Если известна матрица $Z_n^r(A)$, то количество матриц-представителей B, для которых $Z_n^r(B) = Z_n^r(A)$ можно вычислить по формуле:

$$\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{r} \hat{C}_{g_i^j}^{Z_n^r(A)_{i,j}} .$$

Обозначим через $Z_n^r(i,j)$ множество матриц $Z_n^r(A)$, для которых выполняется условие $Z_n^r(i,j)_{k,l} \ne 0 \Rightarrow k < i \vee (k = i \wedge l \le j)$, а также 2 свойства, описанные выше. Заметим, что множество $Z_n^r(n,r)$ состоит из всех возможных матриц $Z_n^r(A)$.

Будем считать величину $f_n^r(i,j)$, определяемую формулой $\sum\limits_{z \in Z_n^r(i,j)} \prod\limits_{k=1}^{n} \prod\limits_{l=1}^{r} \hat{C}_{g_k^l}^{z_{k,l}}$.

Таким образом, $f_n^r(i,j)$ равно количеству матриц-представителей A, таких, что $Z_n^r(A) \in Z_n^r(i,j)$. С учетом пустой матрицы получим, что $f_0^0(0,0)=1$ и $f_n^r(0,0)=0$ для всех остальных значений n и r. Также $f_0^r(i,j)=0, r>0$ и $f_0^r(i,j)=0, r>0$, так как соответствующие множества $Z_n^r(i,j)$ пусты.

Выпишем формулу пересчета величины $f_n^r(i,j)$ для $1 \le i \le n, 1 \le j \le r$. При вычислении будем пользоваться очевидными свойствами $Z_n^r(i,j) = Z_n^r(\min(i,n),\min(j,r))$ и $f_n^r(i,j) = f_n^r(\min(i,n),\min(j,r))$.

$$f_n^r(i,j) = \sum_{z \in Z_n^r(i,j)} \prod_{k=1}^{n} \prod_{l=1}^{r} \hat{C}_{g_k^l}^{z_{k,l}} = \sum_{t=0}^{\lfloor \min(n/i, r/j) \rfloor} \hat{C}_{g_i^j}^{t} \sum_{\substack{z \in Z_n^r(i,j) \\ z_{i,j}=t}} \prod_{\substack{1 \le k \le n \\ 1 \le l \le r \\ k \ne i \vee l \ne j}} \hat{C}_{g_k^l}^{z_{k,l}} =$$

$$= \sum_{t=0}^{\lfloor \min(n/i, r/j) \rfloor} \hat{C}_{g_i^j}^{t} \sum_{z \in Z_{n-ti}^{r-tj}(i,j)} \prod_{\substack{1 \le k \le n-ti \\ 1 \le l \le r-tj \\ k \ne i \vee l \ne j}} \hat{C}_{g_k^l}^{z_{k,l}}.$$

Рассмотрим случай $j>1$. Получим следующую формулу:

$$f_n^r(i,j) = \sum_{t=0}^{\lfloor \min(n/i, r/j) \rfloor} \hat{C}_{g_i^j}^{t} \sum_{z \in Z_{n-ti}^{r-tj}(i,j-1)} \prod_{\substack{1 \le k \le n-ti \\ 1 \le l \le r-tj}} \hat{C}_{g_k^l}^{z_{k,l}} = \sum_{t=0}^{\lfloor \min(n/i, r/j) \rfloor} \hat{C}_{g_i^j}^{t} f_{n-ti}^{r-tj}(i,j-1).$$

В случае $j=1$ аналогичным образом получается формула:

$$f_n^r(i,j) = \sum_{t=0}^{\lfloor \min(n/i, r/j) \rfloor} \hat{C}_{g_i^j}^{t} f_{n-ti}^{r-tj}(i-1,r)\,.$$

Объединяя полученные результаты, определим общий вид формулы вычисления $f_n^r(i,j)$:

$$f_n^r(i,j) = \begin{cases} 0, & nrij = 0 \wedge n^2+r^2+i^2+j^2>0 \\ 1, & n=r=i=j=0 \\ f_n^r(\min(i,n),\min(j,r)), & i>n \vee j>r \\ \sum_{t=0}^{\lfloor \min(n/i, r/j) \rfloor} \hat{C}_{g_i^j}^{t} f_{n-ti}^{r-tj}(i,j-1), & 1 \le i \le n \wedge 1 < j \le r \\ \sum_{t=0}^{\lfloor \min(n/i, r/j) \rfloor} \hat{C}_{g_i^j}^{t} f_{n-ti}^{r-tj}(i-1,r), & 1 \le i \le n \wedge j=1 \end{cases}.$$

Таким образом, получен полиномиальный алгоритм вычисления величины f_n^r при известных значениях g_i^j. Можно добиться еще большего ускорения за счет использования свойств рангов матриц-представителей.

Можно доказать, что порядок клеток матриц из множества F_n^r не превышает $2(n-r)$, поэтому для подсчета величины $f_n^r(i,j)$ достаточно знать значения g_k^l только для $k \le 2(n-r)$. Это обстоятельство значительно упрощает подсчеты для рангов, близких к порядку матрицы.

Ниже приведена таблица рассчитанных на компьютере значений $F_{n,r}$ для $d=n-r$ в диапазоне от 0 до 5.

Таблица 2

Значения величины f_n^r для фиксированных $d=n-r$

$n-r\backslash n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1		2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
2			2	9	14	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15
3				3	14	42	63	68	69	69	69	69	69	69	69	69
4					2	25	94	217	309	336	341	342	342	342	342	342
5						4	33	197	610	1187	1589	1717	1744	1749	1750	1750

В таблице значений можно заметить некоторые закономерности. Числа по строкам не убывают и, начиная с некоторого момента, перестают меняться. В таблице выделены значения, с которых начинается такая стабилизация. Дальнейшие исследования показывают, что такое поведение – не просто случайное совпадение и стабилизация значений f_n^r может быть строго доказана.

Генерация матриц из множества F_n^r

На основе алгоритма вычисления величины $f_n^r(i,j)$ построим алгоритм, позволяющий в явном виде сгенерировать уникальных представителей классов эквивалентности множества P_n в зависимости от их порядка и ранга.

Обозначим через $F_n^r(i,j)$ множество матриц-представителей A, таких, что $Z_n^r(A)\in Z_n^r(i,j)$. Очевидно, что $\left|F_n^r(i,j)\right| = f_n^r(i,j)$.

Легко видеть, что $F_0^0(0,0)$ состоит из единственной пустой матрицы, а все остальные множества $F_n^r(i,j)$, для которых хотя бы одно из чисел n, r, i, j равно нулю, не содержат элементов, так как соответствующее значение $f_n^r(i,j)=0$.

Аналогично предыдущему алгоритму вычисления $f_n^r(i,j)$ будем пользоваться свойством $F_n^r(i,j)=F_n^r(\min(i,n),\min(j,r))$ для $i>n$ или $j>r$.

Упорядочим элементы множества G_n^r в соответствии с отношением порядка, введенным ранее. Обозначим i-й элемент в этом порядке через $G_n^r[i]$.

Укажем рекуррентную формулу пересчета $F_n^r(i,j)$ для $1\le i\le n, 1<j\le r$:

$$F_n^r(i,j)=\bigcup_{t=0}^{\lfloor \min(n/i,r/j)\rfloor}\ \bigcup_{c\in\hat{C}_{g_i^j,t}}\ \bigcup_{A\in F_{n-ti}^{r-tj}(i,j-1)}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & diag(G_i^j[c[1]],G_i^j[c[2]],\dots,G_i^j[c[t]]) \end{pmatrix}$$

Аналогичным образом получается формула для случая $j=1$:

$$F_n^r(i,j)=\bigcup_{t=0}^{\lfloor \min(n/i,r/j)\rfloor}\ \bigcup_{c\in\hat{C}_{g_i^j,t}}\ \bigcup_{A\in F_{n-ti}^{r-tj}(i-1,r)}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & diag(G_i^j[c[1]],G_i^j[c[2]],\dots,G_i^j[c[t]]) \end{pmatrix}$$

Улучшенная нижняя граница величины a_n

В работе [5] установлена связь матриц из множества P_n с проблемой разбиения чисел на слагаемые, а также доказана нижняя оценка на общее количество классов эквивалентности: $a_n \geq p(n)$, где $p(n)$ – количество неупорядоченных разбиений числа n на натуральные слагаемые.

Эта оценка может быть улучшена с использованием клеточного представления матриц.

Заметим, что каждому разбиению числа n на слагаемые $n = p_1 + p_2 + ... + p_k$, где $p_1 \leq p_2 \leq ... \leq p_k$, соответствует связная матрица $A \in P_n$, в которой единицы расположены аналогично диаграмме Юнга этого разбиения. Более формально, первые p_i элементов $(n-k-i)$-й строки матрицы A равны единице, $1 \leq i \leq k$, а все остальные элементы матрицы равны нулю.

Никакие две матрицы, построенные таким образом, не лежат в одном классе эквивалентности, так как каждая из них обладает уникальным спектром единиц по строкам [5], кроме того, все такие матрицы, очевидно, являются связными.

Для заданного n рассмотрим множество R_n, состоящее из матриц $A \in P_n$, удовлетворяющих следующим условиям:

1. Все клетки матрицы A соответствуют некоторому разбиению и имеют вид, описанный выше.
2. Порядок всех клеток матрицы строго меньше $\sqrt{2n}$.
3. Для любого $1 < i < \sqrt{2n}$ существует не более одной клетки порядка i.

Заметим, что в матрице $A \in R_n$ может быть произвольное число клеток порядка 1 и их количество однозначно определяется остальными клетками матрицы A.

Поскольку $1+2+3+...+(\sqrt{2n}-1) < n$, то множество R содержит все возможные комбинации клеток. Из этого следует, что количество классов эквивалентности, на которое разбивается множество R_n определяется по формуле $r(n) = \prod_{1<l<\sqrt{2n}} (p(l)+1)$.

Дополнительная единица в множителях соответствует случаю отсутствия клетки порядка l в матрице.

Таким образом, число количество классов эквивалентности множества P_n можно оценить снизу величиной $r(n)$.

Для полученной оценки $r(n)$ справедливо соотношение $r(n) \geq \prod_{i=1}^{\sqrt{2n}-1} p(i) = t(\sqrt{2n}-1)$.

Детальный анализ асимптотики функции $t(n)$ проведен в [6]

Заключение

В статье рассматривается клеточная форма кэмероновских матриц, которая обеспечивает структурированное представление возникающих классов эквивалентности и предоставляет способ эффективного перечисления их характерных представителей.

Использование описанного представления матриц позволяет контролировать изменение рангов матриц-представителей. Это обстоятельство сделало возможным построение полиномиального алгоритма подсчета числа классов эквивалентности, а также алгоритма генерации их характерных представителей, при условии наличия набора уникальных представителей связных классов.

Конструктивным путем найдена улучшенная нижняя оценка количества классов эквивалентности, основанная на использовании диаграмм Юнга для построения отдельных клеток матрицы и их последующего сочетания.

Список литературы

1. Cameron, P. J. Problems on permutation groups / P. J. Cameron – [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.matchs.qmul.ac.uk/pjc/pgprob.html. – Дата доступа: 15.12.2013.
2. Сергей, А. И. Подсчет классов эквивалентности бинарных матриц / А. И. Сергей, В. А. Липницкий // Информационные компьютерные технологии: проектирование, разработка, применение: сб. науч. ст. / ГрГУ им. Я. Купалы ; редкол.:А. М. Кадан (гл. ред.) [и др.]. – Гродно : ГрГУ, 2013. – 378 с.
3. Сергей, А. И. Оптимизированный алгоритм генерации представителей классов эквивалентности бинарных матриц / А. И. Сергей, В. А. Липницкий // Управление инновациями: теория, методология, практика: материалы XII Международной научно-практической конференции; под общ. ред. С.С. Чернова. – Новосибирск: Издательство ЦРНС, 2015 – С. 101 – 105.
4. Конопелько, В. К. Общие семейства в орбитальной классификации точечных образов. / В. К. Конопелько, В. А. Липницкий, Н. В. Спичекова // Материалы МНТС «Телекоммуникации: сети и технологии, алгебраическое кодирование и безопасность данных». – Мн.: БГУИР, 2011. – С. 17 – 25.
5. Конопелько, В. К. Классификация точечных образов и классическая проблема разбиения чисел. / В. К. Конопелько, В. А. Липницкий, Н. В. Спичекова // Доклады БГУИР, 2010. - №8(54). – С. 127 – 131.
6. The partition factorial constant and asymptotics of the sequence A058694 [Electronic resource]. – Mode of access: http://members.chello.cz/kotesovec/math_articles/kotesovec_partition_factorial_constant.pdf. – Date of access: 14.03.2016.

Сергей Александр Иванович, аспирант Гродненского государственного университета имени Янки Купалы, sergej.a.i@mail.ru

Липницкий Валерий Антонович, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры системного программирования и компьютерной безопасности Гродненского государственного университета имени Янки Купалы, valipnitski@yandex.ru